

## **Prof. dr hab. inż. Henryk Tomaszek**

Institut Techniczny Wojsk Lotniczych,  
ul. Księcia Bolesława 6, 01-494 Warszawa,  
E-mail: henryk.tomaszek@itwl.pl, tel. +48 22 685 19 56

## **Dr inż. Michał Jaształ**

Wojskowa Akademia Techniczna,  
ul. Kaliskiego 2, 00-908 Warszawa,  
E-mail: mjaształ@wat.edu.pl, tel. +48 22 683 77 89

## **Dr inż. Mariusz Zieja**

Institut Techniczny Wojsk Lotniczych,  
ul. Księcia Bolesława 6, 01-494 Warszawa,  
E-mail: mariusz.zieja@itwl.pl, tel. +48 22 685 16 53

# **Uproszczona metoda szacowania niezawodności i trwałości zmęczeniowej elementów konstrukcji statku powietrznego z wykorzystaniem wzoru Parisa dla $m=2$ i zmiennego widma obciążenia**

**Słowa kluczowe:** zmęczenie konstrukcji, niezawodność, trwałość zmęczeniowa, losowe widmo obciążenia

**Streszczenie:** Prezentowany artykuł jest uzupełnieniem pracy [17] w której przedstawiono metodę oceny trwałości zmęczeniowej elementu konstrukcji dla zmiennego widma obciążenia z wykorzystaniem wzoru Parisa dla  $m \neq 2$ . Ze względu na odmienną postać analitycznych rozwiązań dla wykładnika równania Parisa  $m = 2$ , ten szczególny przypadek rozwiązań został przedstawiony w niniejszym opracowaniu. Podobnie jak w pracy [17] pokazany został sposób przekształcenia widma rzeczywistego o zmiennych wartościach cykli w widmo jednorodne o cyklach ważonych. Wykorzystując widmo przekształcone opracowano metodę oceny trwałości zmęczeniowej wybranego elementu konstrukcji statku powietrznego z początkowym pęknięciem. Do modelowania przyrostu długości pęknięcia wykorzystano równanie różnicowe, z którego po przekształceniu otrzymano równanie różniczkowe cząstkowe typu Fokkera-Plancka. Rozwiązaniem szczególnym tego równania jest funkcja gęstości długości pęknięcia elementu. Wykorzystując następnie funkcję gęstości długości pęknięcia określono niezawodność i trwałość zmęczeniową elementu konstrukcji dla pęknięcia narastającego do wartości dopuszczalnej  $l_d$  mniejszej od wartości krytycznej  $l_{kr}$ .

## **1. Wprowadzenie**

Ocena trwałości zmęczeniowej elementu konstrukcji „pracującego” pod wpływem zmiennego widma obciążenia przysparza trudności przy formułowaniu zależności analitycznych. Z tego powodu jest tematem wielu opracowań naukowych [1-6, 16, 18]. Jednak z uwagi na jej decydujące znaczenie w procesie zarządzania bezpieczeństwem lotów zarówno cywilnych jak i wojskowych statków powietrznych istnieje potrzeba poszukiwania uproszczonych rozwiązań o praktycznym wymiarze dla transportu lotniczego [7, 9, 13-15, 18]. Zatem, w niniejszym artykule wykorzystano uproszczoną metodę

przedstawioną pracy [17]. Zastosowane uproszczenie polega na przekształceniu zmiennego widma obciążenia w widmo jednorodne o cyklach ważonych.

Niniejszy artykuł jest uzupełnieniem pracy [17], w której podana została uproszczona metoda oceny trwałości zmęczeniowej elementu konstrukcji statku powietrznego dla zmiennego widma obciążenia z wykorzystaniem wzoru Parisa dla  $m \neq 2$ . Postacie rozwiązań analitycznych różnią się w zależności od wartości wykładników równania Parisa tj.  $m \neq 2$  i  $m = 2$ . Z tego względu w niniejszym opracowaniu rozpatruje się przypadek, gdy wykładnik wzoru Parisa ma wartość  $m = 2$ .

Przyjmuje się, że początkowe pęknięcie w elemencie konstrukcji wynosi  $l_0$ , które pod wpływem obciążenia o zmiennym widmie wzrasta do długości dopuszczalnej  $l_d$  (bezpiecznej) mniejszej od długości krytycznej  $l_{kr}$ . Przyjmuje się, że prędkość narastania pęknięcia w ujęciu deterministycznym opisana jest zależnością Parisa [8]:

$$\frac{dl}{dN} = C(\Delta K)^m, \quad (1)$$

gdzie:

$\Delta K$  - zakres zmian współczynnika intensywności naprężeń,

$C, m$  – stałe materiałowe,

$N$  – zmienna oznaczająca liczbę cykli obciążenia elementu konstrukcji.

Wzór (1) w rozpatrywanym przypadku  $m = 2$  przyjmuje postać:

$$\frac{dl}{dN} = C(\Delta K)^2. \quad (2)$$

## 2. Wyznaczenie prędkości pęknięcia dla $m = 2$ oraz przekształconego widma obciążenia elementu

W przekształceniu widma rzeczywistego o zmiennych wartościach obciążenia w widmo jednorodne o cyklach ważonych przyjmuje się następujące ustalenia:

- 1) Element konstrukcji statku powietrznego pracuje w czasie wykonywania zadań pod zmiennym obciążeniem;
- 2) Dysponujemy widmem obciążenia w czasie trwania standardowego lotu statku powietrznego. Obciążenie jest wielokrotnością cyklu standardowego;
- 3) Zakładamy, że posiadane standardowe widmo pozwala wyznaczyć:
  - całkowitą liczbę cykli obciążenia  $N_c$  w czasie trwania jednego lotu,
  - w widmie jest  $L$  progów o maksymalnej wartości obciążenia  $\sigma_1^{max}, \sigma_2^{max}, \dots, \sigma_L^{max}$ ;
- 4) Liczba powtórzeń maksymalnych wartości progowych w przyjętym widmie jest następująca:
  - $\sigma_1^{max}$  występuje  $n_1$  razy,  $\sigma_2^{max}$  występuje  $n_2$  razy, ...,  $\sigma_L^{max}$  występuje  $n_L$  razy;
  - Liczba powtórzeń określonych wartości progowych obciążenia w jednym locie wynosi  $N_c = \sum_{i=1}^L n_i$ ;
- 5) Wartość minimalną w progach określa się według zależności:

$$\sigma_{i,śr}^{min} = \frac{\sigma_{i,1}^{min} + \sigma_{i,2}^{min} + \dots + \sigma_{i,n_i}^{min}}{n_i}, \text{ gdzie } i = 1, 2, \dots, L.$$

- 6) Zestawienie maksymalnych  $\sigma_i^{max}$  i minimalnych  $\sigma_{i,śr}^{min}$  wartości naprężeń w cyklach oraz częstości ich występowania  $P_i$  zostało przedstawione w tabeli 1.

Tabela 1. Zestawienie maksymalnych  $\sigma_i^{max}$  i minimalnych  $\sigma_{i,śr}^{min}$  wartości naprężeń w cyklach oraz częstości ich występowania  $P_i$

$\sigma_i^{max}$	$\sigma_1^{max}$	$\sigma_2^{max}$	...	$\sigma_i^{max}$	...	$\sigma_L^{max}$
$\sigma_{i,śr}^{min}$	$\sigma_{1,śr}^{min}$	$\sigma_{2,śr}^{min}$	...	$\sigma_{i,śr}^{min}$	...	$\sigma_{L,śr}^{min}$
$P_i$	$P_1 = \frac{n_1}{N_c}$	$P_2 = \frac{n_2}{N_c}$	...	$P_i = \frac{n_i}{N_c}$	...	$P_L = \frac{n_L}{N_c}$

7) Ustalenie współczynników asymetrii cykli zestawione zostało w tabeli 2.

Tabela 2. Zestawienie współczynników asymetrii cyklu  $\hat{R}_i$  oraz współczynników  $U_i$  uwzględniających ich wpływ na prędkość pęknięcia

cykl $i$	1	2	...	$i$	...	$L$
$\hat{R}_i$	$\hat{R}_1$	$\hat{R}_2$	...	$\hat{R}_i$	...	$\hat{R}_L$
$U_i$	$U_1$	$U_2$	...	$U_i$	...	$U_L$

Gdzie:

$$\hat{R}_i = \frac{\sigma_{i,śr}^{min}}{\sigma_i^{max}}, \quad U_i = \alpha_1 + \alpha_2 \hat{R}_i + \alpha_3 \hat{R}_i^2; \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 - \text{współczynniki empiryczne [11, 12].}$$

8) Ustalenie zakresu zmian naprężenia zestawione zostało w tabeli 3.

$$\Delta\sigma_i = \sigma_i^{max} - \sigma_{i,śr}^{min}$$

Tabela 3. Zestawienie wartości zakresu zmian naprężeń  $\Delta\sigma_i$  oraz częstości ich występowania  $P_i$

typy cykli	1	2	...	$i$	...	$L$
$\Delta\sigma_i$	$\Delta\sigma_1$	$\Delta\sigma_2$	...	$\Delta\sigma_i$	...	$\Delta\sigma_L$
$P_i$	$P_1$	$P_2$	...	$P_i$	...	$P_L$

9) Uwzględnienie wpływu cykli przeciążeniowych na wzrost pęknięcia (tabela 4):

$$\Delta\sigma_{i,ef} = C_i^P \Delta\sigma_i,$$

gdzie:

$C_i^P$  – współczynnik spowolnienia wzrostu pęknięcia po wystąpieniu cykli przeciążeniowych [10].

Tabela 4. Zestawienie wartości zakresu zmian naprężeń efektywnych  $\Delta\sigma_{i,ef}$  uwzględniających występowanie cykli przeciążających

typy cykli	1	2	...	$i$	...	$L$
współczynniki	$C_1^P$	$C_2^P$	...	$C_i^P$	...	$C_L^P$
$\Delta\sigma_{i,ef}$	$\Delta\sigma_{1,ef}$	$\Delta\sigma_{2,ef}$	...	$\Delta\sigma_{i,ef}$	...	$\Delta\sigma_{L,ef}$

Dla przyjętych wyżej ustaleń zależność (1) na prędkość pęknięcia przyjmuje postać:

$$\frac{dl}{dN} = C\pi^{\frac{m}{2}} \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i (\Delta\sigma_{i,ef})^m \right) M_k^m l^{\frac{m}{2}}, \quad (3)$$

gdzie:

$M_k$  - wielkość określająca wpływ położenia pęknięcia w elemencie konstrukcyjnym oraz jego wymiarów w stosunku do wymiarów całego elementu [8].

Zależność (3) po uwzględnieniu wszystkich typów cykli obciążeniowych przyjmuje postać:

$$\frac{dl}{dN} = C\pi M_k^2 \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i (\Delta\sigma_{i,ef})^2 \right) l, \quad (4)$$

gdzie  $i = 1, 2, \dots, L$ .

Zależność (4) można wyrazić w funkcji czasu lub dokładniej w funkcji nalotu statku powietrznego. W tym celu przyjmujemy:

$$N = \lambda t, \quad (5)$$

gdzie:

$\lambda$  – intensywność pojawiania się cykli obciążenia elementu konstrukcji;

$N$  – liczba cykli obciążenia;

$t$  – nalot statku powietrznego.

W naszym przypadku  $\lambda = 1/\Delta t$  gdzie  $\Delta t$  jest czasem trwania zmęczeniowego cyklu obciążenia elementu. W celu określenia  $\Delta t$  można skorzystać z następującej zależności:

$$\Delta t = \frac{T}{N_c}, \quad (6)$$

gdzie:

$T$  – średni czas trwania lotu standardowego statku powietrznego przy ustalaniu widma obciążenia,

$N_c$  – liczba cykli w standardowym widmie obciążenia.

Po tych przekształceniach wzór (4) przyjmuje postać:

$$\frac{dl}{dt} = \lambda C\pi M_k^2 \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i (\Delta\sigma_{i,ef})^2 \right) l. \quad (7)$$

Wzór (7) charakteryzuje prędkość narastania pęknięcia dla widma jednorodnego z cyklami ważonymi jednego typu.

### 3. Określenie funkcji gęstości długości pęknięcia elementu w funkcji czasu (nalotu)

Niech  $U_{l,t}$  oznacza prawdopodobieństwo, że dla nalotu statku równego  $t$  długość pęknięcia elementu wynosi  $l$ . Równanie różnicowe dla powyższych ustaleń przyjmuje postać [7,18]:

$$U_{l,t+\Delta t} = (1 - \lambda\Delta t)U_{l,t} + \lambda\Delta t U_{l-\Delta l,t}, \quad (8)$$

gdzie:

$\Delta l$  – przyrost pęknięcia w czasie jednego cyklu zastępczego.

Wartość przyrostu długości pęknięcia na podstawie wzoru (7) będzie:

$$\Delta l = \lambda C\pi M_k^2 \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i (\Delta\sigma_{i,ef})^2 \right) l \Delta t. \quad (9)$$

Równanie (8) w zapisie funkcyjnym przyjmuje postać:

$$U(l, t + \Delta t) = (1 - \lambda\Delta t)U(l, t) + \lambda\Delta t U(l - \Delta l, t), \quad (10)$$

gdzie:

$U(l, t)$  – funkcja gęstości długości pęknięcia po nalocie wynoszącym  $t$  określonym w godzinach lotu;

$(1 - \lambda\Delta t)$  – prawdopodobieństwo, że w czasie o długości  $\Delta t$  nie wystąpi zastępczy cykl obciążenia;

$\lambda\Delta t$  – prawdopodobieństwo tego, że w czasie o długości  $\Delta t$  wystąpi zastępczy cykl obciążenia.

Równanie (10) przekształcimy w równanie różniczkowe cząstkowe. W tym celu przyjmujemy następujące przybliżenia:

$$\left. \begin{aligned} U(l, t + \Delta t) &\cong U(l, t) + \frac{\partial U(l, t)}{\partial t} \Delta t \\ U(l - \Delta l, t) &\cong U(l, t) - \frac{\partial U(l, t)}{\partial l} \Delta l + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U(l, t)}{\partial l^2} (\Delta l)^2 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Podstawiając (11) do (10) otrzymujemy:

$$\frac{\partial U(l, t)}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial U(l, t)}{\partial l} \Delta l + \frac{1}{2} \lambda (\Delta l)^2 \frac{\partial^2 U(l, t)}{\partial l^2}, \quad (12)$$

gdzie:

$$\Delta l = \lambda C \pi \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i (\Delta \sigma_{i,ef})^2 \right) M_k^2 l \Delta t.$$

Ponieważ,  $\lambda \Delta t = 1$ , stąd:

$$\Delta l = C \pi \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i (\Delta \sigma_{i,ef})^2 \right) M_k^2 l. \quad (13)$$

Niech:

$$C \pi M_k^2 = C_2, \quad (14)$$

$$\Delta l = C_2 \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i (\Delta \sigma_{i,ef})^2 \right) l. \quad (15)$$

Podstawiając zależność (15) do równania (12) otrzymujemy:

$$\frac{\partial U(l, t)}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial U(l, t)}{\partial l} C_2 \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i (\Delta \sigma_{i,ef})^2 \right) l + \frac{1}{2} \lambda (C_2 \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i (\Delta \sigma_{i,ef})^2 \right) l)^2 \frac{\partial^2 U(l, t)}{\partial l^2}. \quad (16)$$

W równaniu (16) należy za długość pęknięcia  $l$  podstawić wynik rozwiązania równania (7):

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt} &= \lambda C_2 \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i (\Delta \sigma_{i,ef})^2 \right) l, \\ \int_{l_0}^l \frac{dx}{x} &= \int_0^t C_2 \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i (\Delta \sigma_{i,ef})^2 \right) dt, \\ l &= l_0 e^{\lambda C_2 \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i (\Delta \sigma_{i,ef})^2 \right) t}. \end{aligned} \quad (17)$$

Gdzie zgodnie ze wzorem (14):

$$C_2 = C \pi M_k^2.$$

Uwzględniając (17) to współczynniki równania (16) można zapisać następująco:

$$\alpha(t) = \lambda C_2 \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i (\Delta \sigma_{i,ef})^2 \right) l_0 e^{\lambda C_2 \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i (\Delta \sigma_{i,ef})^2 \right) t} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \beta(t) &= \lambda \left[ C_2 \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i (\Delta \sigma_{i,ef})^2 \right) l_0 e^{\lambda C_2 \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i (\Delta \sigma_{i,ef})^2 \right) t} \right]^2 = \\ &= \lambda C_2^2 \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i (\Delta \sigma_{i,ef})^2 \right)^2 l_0^2 e^{2\lambda C_2 \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i (\Delta \sigma_{i,ef})^2 \right) t}. \end{aligned} \quad (19)$$

Równanie (16) ze współczynnikami w postaci zależności (18) i (19) przyjmuje następującą postać dla  $m = 2$ :

$$\frac{\partial U(l,t)}{\partial t} = -\alpha(t) \frac{\partial U(l,t)}{\partial l} + \frac{1}{2} \beta(t) \frac{\partial^2 U(l,t)}{\partial l^2}. \quad (20)$$

Rozwiązanie szczególne równania (20) przyjmuje następującą postać [7, 18]:

$$U(l,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi A(t)}} e^{-\frac{(l-B(t))^2}{2A(t)}} \quad (21)$$

gdzie:

$B(t)$  – wartość średnia przyrostu długości pęknięcia dla nalotu  $t$  określona zależnością:

$$B(t) = \int_0^t \alpha(t) dt. \quad (22)$$

$A(t)$  – wariancja przyrostu długości pęknięcia dla nalotu  $t$  określona zależnością:

$$A(t) = \int_0^t \beta(t) dt. \quad (23)$$

Obliczenie całki (22):

$$\begin{aligned} B(t) &= \int_0^t \alpha(t) dt = \lambda C_2 \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^2 \right) l_0 \int_0^t e^{\lambda C_2 \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^2 \right) t} dt = \\ &= \lambda C_2 \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^2 \right) l_0 \frac{1}{\lambda C_2 \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^2 \right)} \cdot e^{\lambda C_2 \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^2 \right) t} \Big|_0^t = \\ &= l_0 (e^{\lambda C_2 \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^2 \right) t} - 1). \end{aligned} \quad (24)$$

Obliczenie całki (23):

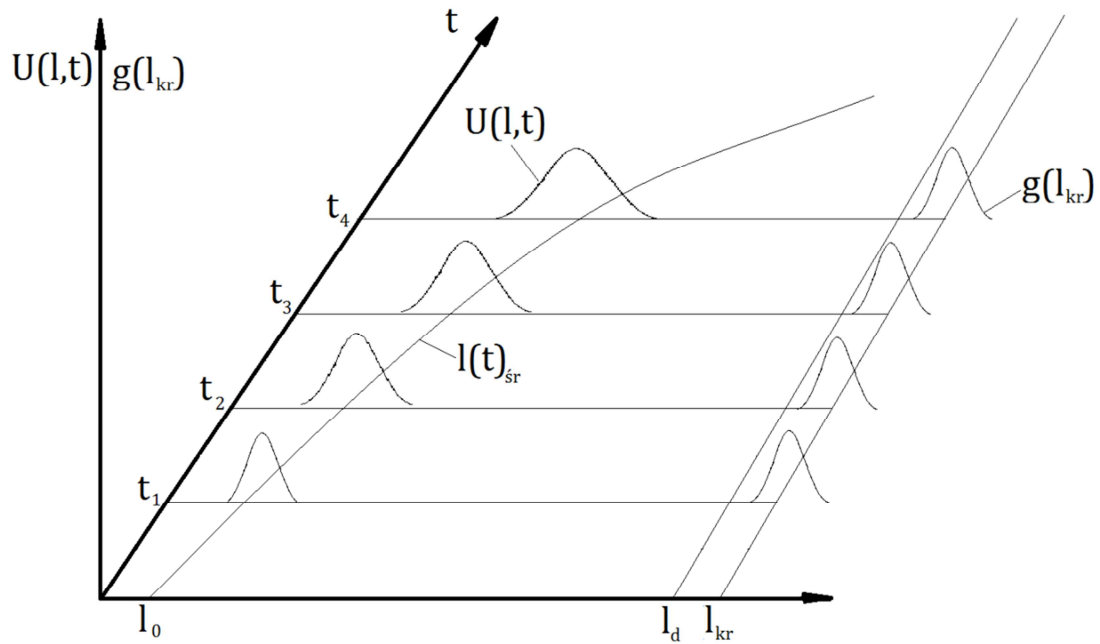
$$\begin{aligned} A(t) &= \int_0^t \beta(t) dt = \lambda C_2^2 \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^2 \right)^2 l_0^2 \int_0^t e^{2\lambda C_2 \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^2 \right) t} dt = \\ &= \frac{\lambda C_2^2 \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^2 \right)^2 l_0^2}{2\lambda C_2 \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^2 \right)} \cdot e^{2\lambda C_2 \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^2 \right) t} \Big|_0^t = \\ &= \frac{1}{2} C_2 l_0^2 \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^2 \right) (e^{2\lambda C_2 \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^2 \right) t} - 1). \end{aligned} \quad (25)$$

Gdzie zgodnie ze wzorem (14):

$$C_2 = C\pi M_k^2.$$

#### 4. Określenie niezawodności i trwałości zmęczeniowej wybranego elementu konstrukcji statku powietrznego

Schemat narastania zagrożenia katastroficznego pęknięcia elementu konstrukcji pokazany jest na rysunku 1.



Rys.1. Schemat narastania zagrożenia katastroficznego pęknięcia elementu konstrukcji [18]

Element zostanie zniszczony, gdy bieżąca długość pęknięcia  $l$  przekroczy wartość długości krytycznej  $l_{kr}$  lub będzie równa tej wartości. Czyli:

$$l - l_{kr} \geq 0.$$

Gdzie  $l$  i  $l_{kr}$  są realizacjami zmiennych losowych  $\hat{L}_t$  i  $L_{kr}$ . Stąd

$$\kappa = \hat{L}_t - L_{kr}. \quad (26)$$

Funkcję gęstości zmiennej losowej  $\kappa$  wyznaczamy z zależności:

$$f(\kappa)_t = \int_0^\infty g(l - \kappa)U(l, t)dl. \quad (27)$$

Prawdopodobieństwo zniszczenia elementu konstrukcji wyraża się zależnością:

$$Q'_t = P\{\hat{L}_t - L_{kr} \geq 0\} = \int_0^\infty f(\kappa)_t d\kappa. \quad (28)$$

Stąd niezawodność elementu będzie:

$$R(t) = 1 - \int_0^\infty f(\kappa)_t d\kappa. \quad (29)$$

Niezawodność elementu konstrukcji można wyznaczyć również w następujący sposób. Krytyczną długość pęknięcia można określić wykorzystując współczynnik intensywności naprężeń w postaci:

$$K = M_k \sigma \sqrt{\pi l}. \quad (30)$$

Współczynnik określony zależnością (30) w przypadku krytycznej długości pęknięcia  $l_{kr}$  i krytycznego naprężenia  $\sigma_{kr}$  staje się wielkością krytyczną  $K_c$  nazywaną odpornością materiału na pęknięcie:

$$K_c = M_k \sigma_{kr} \sqrt{\pi l_{kr}}. \quad (31)$$

Stąd:

$$l_{kr} = \frac{K_c^2}{M_k^2 \sigma_{kr}^2 \pi}.$$

Wykorzystując zależność (31) i wprowadzając współczynnik bezpieczeństwa, można wyznaczyć wartość dopuszczalną (bezpieczną) długości pęknięcia:

$$\bar{l}_d = \frac{K_c^2}{k M_k^2 \sigma_{kr}^2 \pi}, \quad (32)$$

gdzie:

$k$  – współczynnik bezpieczeństwa.

Uwzględniając długość pęknięcia początkowego  $l_0$ , możemy wyznaczyć dopuszczalny przyrost długości pęknięcia  $l_d$  korzystając z następującej zależności:

$$l_d = \bar{l}_d - l_0. \quad (33)$$

Wykorzystując zależność (33) można określić niezawodność elementu konstrukcji w sposób następujący:

$$R(t)_{l_d} = \int_{-\infty}^{l_d} U(l, t) dl \quad (34)$$

Normując podcałkową funkcję w zależności (34) otrzymujemy:

$$R(t)_{l_d} = \int_{-\infty}^{\frac{l_d - B(t)}{\sqrt{A(t)}}} U(z, t) dz, \quad (35)$$

gdzie:

$$z = \frac{l - B(t)}{\sqrt{A(t)}},$$

natomiast  $B(t)$  i  $A(t)$  określone są zależnościami (24) i (25).

Dla przyjętego poziomu niezawodności odczytujemy z tablic rozkładu normalnego wartości górnej granicy całki (35). Stąd otrzymujemy zależność:

$$Q_{l_d} = \frac{l_d - B(t)}{\sqrt{A(t)}} \quad (36)$$

gdzie:

$Q_{l_d}$  – wartość górnej granicy całki (35) dla której wartość całki będzie równa  $R(t)_{l_d}$ .

Rozwiązując otrzymane równanie z zależności (36) znajdujemy wartość nalotu (poszukiwaną trwałość elementu konstrukcji) dla którego spełniony jest przyjęty poziom niezawodności.

## 5. Uwagi końcowe wraz z przykładem liczbowym

W celu zilustrowania opracowanej metody przedstawiono przykład obliczeniowy prędkości wzrostu średniej długości pęknięcia w elemencie wykonanym ze stali o określonych własnościach materiałowych, poddanego oddziaływaniu rzeczywistego widma obciążenia. Obliczenia prowadzono dla przekształconego w sposób podany w punkcie 2



widma obciążeń zmiennoamplitudowych, które reprezentuje rzeczywiste widmo obciążenia elementu [7]. Wielkości charakteryzujące przekształcone widmo obciążeń zastosowane w badaniach zostało przedstawione w poniższej tabeli 5.

Tabela 5. Wielkości charakteryzujące przekształcone widmo obciążeń

Stopień obciążenia $i$	1	2	3	4	5	6	7
Liczba cykli	1	5	4	10	30	50	140
$\sigma_i^{max}$ [MPa]	186	159	141	129	112	93	72
$\sigma_{i,śr}^{min}$ [MPa]	-28	-13	8	17	23	27	27
Współczynnik $\hat{R}_i$	-0,1505	-0,0818	0,0567	0,1317	0,2053	0,2903	0,375
Zakres naprężenia $\Delta\sigma_{i,ef}$ [MPa]	214	172	133	112	89	66	45
Współczynnik $U_i$	0,5030	0,5238	0,5691	0,5955	0,6228	0,6559	0,6906
Udział stopnia w widmie (częstość występowania) $P_i$	0,0042	0,0208	0,0167	0,0417	0,125	0,2083	0,5833

Tabela 5 zawiera wartości zakresów zmian naprężeń w cyklu  $\Delta\sigma_i$  w przyjętych stopniach obciążenia  $i$  oraz ich częstości występowania  $P_i$  a także współczynniki uwzględniające wpływ asymetrii cyklu na rozwój pęknięcia.

Dla określonego materiału elementu modelowego, do obliczeń przyjęto następujące wartości współczynników materiałowych:

$$m = 2,$$

$$C = 5 \cdot 10^{-9}.$$

W prezentowanym przykładzie do obliczeń przyjęto początkową długość pęknięcia elementu  $l_0 = 10mm$ , natomiast dopuszczalną długość pęknięcia wyznaczono wykorzystując zależność (32) i wynosi ona  $\bar{l}_d = 25mm$ . Do obliczeń założono również, że współczynnik spowolnienia wzrostu pęknięcia po wystąpieniu cykli przeciążeniowych  $C_i^P = 1$ , natomiast współczynnik uwzględniający wpływ asymetrii cyklu na rozwój pęknięcia określony jest empirycznym równaniem  $U_i = 0,55 + 0,33\hat{R}_i + 0,12\hat{R}_i^2$ . Zmiana wartości współczynnika  $M_k$  w trakcie rozwoju pęknięcia uwzględniona została w procesie obliczeń numerycznych zgodnie z zależnością:

$$M_k = 1 + 0,128 \left(\frac{l}{b}\right) - 0,288 \left(\frac{l}{b}\right)^2 + 1,525 \left(\frac{l}{b}\right)^3, \quad (37)$$

gdzie:

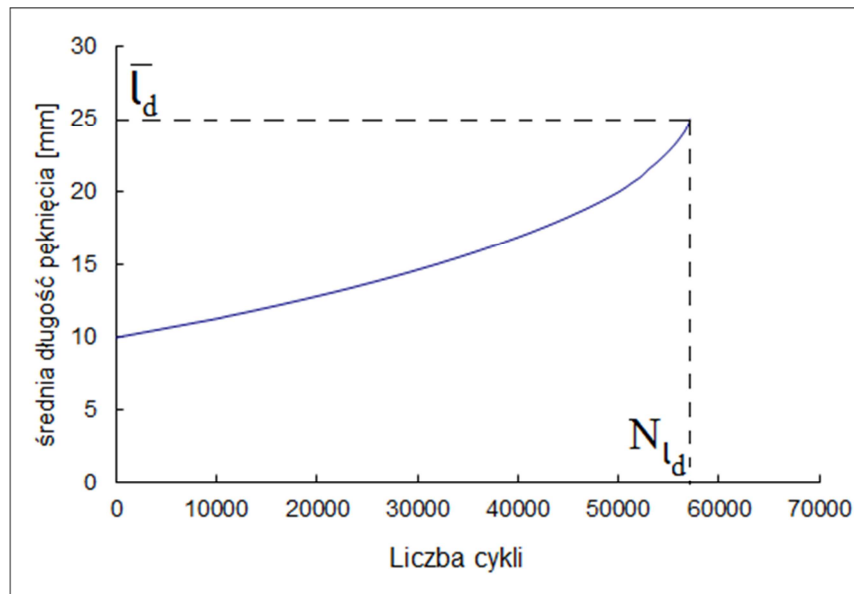
$l$  – bieżąca długość pęknięcia;

$b$  – szerokość elementu w kierunku wzrostu pęknięcia.

Następnie wykorzystano przekształcone równanie (24) na średnią długość pęknięcia uzależniając ją na podstawie równania (5) od liczby cykli obciążenia  $N$ :

$$B(N) = l_0 \cdot (e^{C \cdot \pi \cdot M_k^2 \cdot (\sum_{i=1}^L P_i \cdot U_i \cdot (\Delta\sigma_{i,ef})^2)} - 1). \quad (38)$$

Na podstawie powyższej zależności wyznaczono przyrost średniej długości pęknięcia w funkcji liczby cykli obciążenia  $N$  od długości początkowej  $l_0 = 10mm$  do długości dopuszczalnej  $\bar{l}_d = 25mm$ . Zmiana średniej długości pęknięcia w funkcji liczby cykli obciążenia została przedstawiona na rys. 2.



Rys. 2. Przyrost średniej długości pęknięcia w funkcji liczby cykli obciążenia

Bazując jedynie na obliczeniach wzrostu średniej długości pęknięcia zmęczeniowego  $B(N)$ , można stwierdzić, iż długość dopuszczalna pęknięcia  $\bar{l}_d = 25\text{mm}$  zostanie osiągnięta po  $N_{l_d} = 57115$  cyklach obciążenia. Jednakże, aby wyznaczyć trwałość zmęczeniową badanego elementu w ujęciu probabilistycznym należy dodatkowo uwzględnić opisaną wzorem (25) wartość wariancji długości pęknięcia  $A(N)$ . W tym celu korzystamy z równania (36) uzależniając go na podstawie równania (5) od liczby cykli obciążenia  $N$ :

$$Q_{l_d} = \frac{l_d - B(N)}{\sqrt{A(N)}} \quad (39)$$

Dla przyjętego poziomu niezawodności  $R(N)_{l_d}^* = 0,99958$  odczytujemy z tablic rozkładu normalnego standardowego wartość górnej granicy całki (35)  $Q_{l_d} = 3,34$ . Rozwiązując powyższe równanie otrzymujemy liczbę cykli obciążenia  $N_{l_d} = 56750$ , która jest trwałością zmęczeniową badanego elementu w ujęciu probabilistycznym.

Zaletą prezentowanej metody jest fakt, że uwzględnia ona zjawiska fizyczne towarzyszące występowaniu zmiennego widma obciążenia. Należy pamiętać, iż w niniejszym opracowaniu przedstawiono metodę użyteczną w przypadku, gdy materiał elementu konstrukcji posiada odpowiednie cechy w postaci przyjętego umownie jako stała materiałowa wykładnika wzoru Parisa o wartość  $m = 2$ . Wartości występujących w tej metodzie stałych materiałowych (poza przyjętą wielkością  $m = 2$ ), można określić doświadczalnie lub oszacować wykorzystując dane eksploatacyjne rozwoju pęknięć z zastosowaniem metody momentów lub funkcji wiarygodności (np. współczynnik  $C$  równania Parisa). W przypadku szacowania trwałości zmęczeniowej elementu konstrukcji dla którego właściwym jest przyjęcie wykładnika równania Parisa  $m \neq 2$  należy wykorzystać metodę przedstawioną w pracy [17].

## Literatura

1. Bolotin V, Belousov I. Early fatigue crack growth as the damage accumulation process. J Probabilist Eng Mech 2001; 16: 279–87.

2. Castiglioni C. A stochastic model for estimating the fatigue life of structural steel details. *J Construct Steel Res* 1991; 18: 111–38.
3. Castillo E, Fernández-Canteli A, Castillo C, Mozos C. A new probabilistic model for crack propagation under fatigue loads and its connection with Wöhler fields. *Int J Fatigue* 2010; 32(4): 744–53.
4. Ghonem H, Provan W. Micromechanics theory of fatigue crack initiation and propagation. *Eng Fract Mech* 1988; 13: 963–977.
5. Kim Jung-Kyu, Shim Dong Suk. Probabilistic analysis on variability of fatigue crack growth using the Markov chain. *J Mech Sci Technol* 1998;12(6): 1135–1142.
6. Kocańda D, Kocańda S, Tomaszek H. Probabilistic description of fatigue crack growth in a titanium alloy under complex stress state. In: Blom AF, editor. *Proc. Eighth Int. Fatigue Congress, EMAS, Sweden; 2002: 1299–306.*
7. Kocańda D., Tomaszek H., Jaształ M. Predicting fatigue crack growth and fatigue life under variable amplitude loading, *Fatigue of Aircraft Structures - Monographic Series Issue 2010, Institute of Aviation Scientific Publications, Warsaw 2010: 37–51.*
8. Kocańda S., Szala J. *Podstawy obliczeń zmęczeniowych*, PWN, Warszawa 1985.
9. Liu Y, Mahadevan S. Stochastic fatigue damage modeling under variable amplitude loading. *Int J Fatigue* 2007; 29:1149–61.
10. Rama Chandra Murthy A., Palani, Nagesh R. Iyer G.S., An improved Wheeler model for remaining life prediction of cracked plate panels under tensile-compressive overloading, *SID*, 1 No 3 (2005): 203-213.
11. Schijve J., The significance of fractography for investigations of fatigue crack growth under variable-amplitude loading, *Fatigue Fract Eng Mater Struct* 22 (1999): 87–99.
12. Schijve J., Skorupa M., Skorupa A., Machniewicz T., Gruszczyński P. Fatigue crack growth in aluminium alloy D16 under constant and variable amplitude loading, *Int. J. Fatigue*, 26 (2004): 1–15.
13. Skorupa M. Load interaction effects during fatigue crack growth under variable amplitude loading – a literature review. Part I. Empirical trends. *Fatigue Fract Eng Mater Struct* 1998; 21:987–1006.
14. Skorupa M. Load interaction effects during fatigue crack growth under variable amplitude loading – a literature review. Part II. Qualitative interpretation. *Fatigue Fract Eng Mater Struct* 1999; 22: 905–926.
15. Sobczyk K, Trębicki J. Cumulative jump-correlated model for random fatigue. *J Eng Fract Mech* 1991; 40: 201–210.
16. Tang J, Spencer BF. Reliability solution for the stochastic fatigue crack growth problem. *J Eng Fract Mech* 1989; 12(2): 419–433.

17. Tomaszek H, Jaształ M, Zieja M. A simplified method to assess fatigue life of selected structural components of an aircraft for a variable load spectrum. *Eksploatacja i Niezawodność - Maintenance and Reliability* 2011; 4: 29-34.
18. Tomaszek H., Żurek J., Jaształ M. Prognozowanie uszkodzeń zagrażających bezpieczeństwu lotów statków powietrznych, Wydawnictwo Naukowe ITE-PIB, Radom 2008.