

**Dr inż. Andrzej Graboś**  
**Dr inż. Marek Boryga**

Katedra Inżynierii Mechanicznej i Automatyki,  
Wydział Inżynierii Produkcji, Uniwersytet Przyrodniczy w Lublinie,  
ul. Doświadczalna 50A, 20-280 Lublin, Polska  
e-mail: andrzej.grabos@up.lublin.pl  
e-mail: marek.boryga@up.lublin.pl

## **Planowanie trajektorii ruchu chwytaka z punktem pośrednim**

**Słowa kluczowe:** *planowanie trajektorii, chwytak, wielomianowy profil przyspieszenia, udar*

**Streszczenie:** W pracy zaprezentowano metodę PCM (Polynomial Cross Method) do planowania trajektorii ruchu chwytaka z punktem pośrednim. PCM ma zastosowanie do planowania ruchu chwytaka, którego tor składa się z dwóch odcinków prostoliniowych. Profil przyspieszenia na obu odcinkach opisany został wielomianem siódmego stopnia. W pracy przedstawiono algorytm metody oraz wyniki w postaci przebiegów prędkości, przyspieszenia i udaru liniowego.

### **1. Wprowadzenie**

Planowanie trajektorii ruchu jest jednym z pierwszych i kluczowych etapów przy eksploatacji zrobotyzowanych stanowisk pracy. Zagadnienie to jest aktywnym polem badań naukowych i wiele pozycji literaturowych poświęconych jest temu problemowi. Autorzy stosowali różne techniki planowania trajektorii ruchu. Niektóre z metod uwzględniały ograniczenie niekorzystnego zjawiska udaru, co w praktyce korzystnie wpływa na zmniejszenie błędów odwzorowania trajektorii. Visioli [10] oraz Dyllong i Visioli [3] do planowania trajektorii stosowali splajny sześciennego i trygonometryczne trzeciego rzędu, w przypadku których występuje niekorzystne zjawisko udaru w początkowym i końcowym punkcie toru. Zjawisko to, w niektórych przypadkach, zostało wyeliminowane przez zastosowanie splajnow trygonometrycznych czwartego rzędu. Jednym z kryteriów optymalizacji planowanej trajektorii ruchu w pracy Choi i inni [2] było utrzymanie udaru w określonych granicach. Otrzymane przebiegi udaru w parach kinematycznych są nieciągłe i mają charakter skokowy. Jednocześnie, zarówno w początkowym jak i końcowym punkcie toru, udar jest różny od zera. Red [7] do planowania trajektorii wykorzystał splajny i stosował stałe (jednak różne od zera) wartości udaru przy przejściu między stałymi fazami przyspieszenia i opóźnienia. Analizując przedstawione w pracy Rubio i inni [8] przebiegi przyspieszenia ogniw manipulatora Puma 560, można stwierdzić, że w początkowym i końcowym punkcie toru występuje niekorzystne zjawisko udaru w parach kinematycznych. Podobna uwaga dotyczy przebiegów udaru w parach kinematycznych w pracy Saramago i Ceccarelli [9]. Przebiegi udaru w parach kinematycznych, uzyskane w pracy Huang i inni [5], w początkowej i końcowej chwili ruchu są bliskie zeru. Metoda zastosowana w pracy Olabi i inni [6], generuje gładki przebieg udaru narzędzia z uwzględnieniem ograniczeń w parach kinematycznych. Bardzo interesujące rezultaty dotyczące przebiegu udaru w parach kinematycznych uzyskano w pracy Gasparetto i Zanotto [4]. Wykorzystując B-splajny piątego rzędu uzyskano nie tylko ciągły przebieg udaru, ale także jego zerowe wartości w początkowym i końcowym punkcie toru. Wielomiany wyższych stopni opisujące profil przyspieszenia wykorzystali Boryga i Graboś [1]. W pracy analizowali przebiegi prędkości, przyspieszeń oraz udarów dla wielomianów piątego, siódmego oraz dziewiątego stopnia. Na

podstawie przeprowadzonych badań symulacyjnych uzyskali najmniejsze wartości uderów liniowych i kątowych stosując wielomian siódmego stopnia.

W niniejszej pracy autorzy przedstawili algorytm PCM, który umożliwia planowanie ruchu chwytaka, którego tor składa się z dwóch odcinków prostoliniowych. Odcinki te są położone w przestrzeni roboczej manipulatora. Sformułowano następujące założenia dotyczące ruchu chwytaka:

- profil przyspieszenia na obu odcinkach prostoliniowych opisano wielomianem siódmego stopnia,
- w początkowym i końcowym punkcie toru profil przyspieszenia jest styczny do osi czasu, co eliminuje niekorzystne zjawisko uderu,
- zmiana fazy rozruchu na fazę hamowania następuje w punkcie pośrednim,
- wartość przyspieszenia liniowego dowolnej współrzędnej nie przekracza założonej wartości maksymalnej -  $a_{max}$ ,
- ruch chwytaka odbywa się w taki sposób, by w punkcie pośrednim (połączenie odcinków prostoliniowych) wartość prędkości wypadkowej nie ulegała zmianie.

Konsekwencją założenia stałej wartości prędkości wypadkowej w punkcie pośrednim jest zerowa wartość przyspieszenia wypadkowego. Należy tu zaznaczyć, że w punkcie pośrednim zmianie ulega kierunek wektora prędkości wypadkowej, co wynika z przyjętego toru ruchu chwytaka. Istotną zaletą przedstawionego algorytmu jest fakt, że współczynniki wielomianów opisujących profil przyspieszenia, na dowolnej współrzędnej, wyznacza się jedynie na podstawie przyrostu współrzędnej i założonego przyspieszenia maksymalnego. Jednocześnie wyeliminowanie uderu w początkowym i końcowym punkcie toru pozytywnie wpłynie na dokładność odwzorowania trajektorii ruchu, co jest szczególnie korzystne w przypadku procesów technologicznych takich jak np. przenoszenie, malowanie, montaż, spawanie, zgrzewanie liniowe, uszczelnianie (klejenie), paletyzacja i depaletyzacja.

Układ pracy jest następujący. W rozdziale 2 przedstawiono sposób planowania trajektorii ruchu z wykorzystaniem wielomianu siódmego stopnia wykorzystujący krotności miejsc zerowych. W rozdziale 3 przedstawiono algorytm metody, który podzielono na obliczenia wstępne, obliczenia dłuższego i krótszego odcinka prostoliniowego oraz obliczenia końcowe. W rozdziale 4 pracy przedstawiono przykład wykorzystania zaproponowanego algorytmu. Wyniki symulacji przedstawiono w rozdziale 5. Wnioski przedstawione zostały w ostatnim rozdziale pracy.

## 2. Planowanie trajektorii ruchu z wykorzystaniem wielomianów

Do planowania trajektorii ruchu chwytaka wykorzystywać można wielomiany wyższych stopni, które umożliwiają kształtowanie profilu przyspieszenia. W pracy Boryga i Graboś [1] wykazano, że spośród wielomianów piątego, siódmego i dziewiątego stopnia opisujących profil przyspieszenia, najmniejsze wartości uderów liniowych i kątowych występują w przypadku wielomianu siódmego stopnia. W związku z tym, w niniejszej pracy do opisu przebiegu przyspieszenia na współrzędnej  $x_i$  wykorzystano wielomian siódmego stopnia postaci

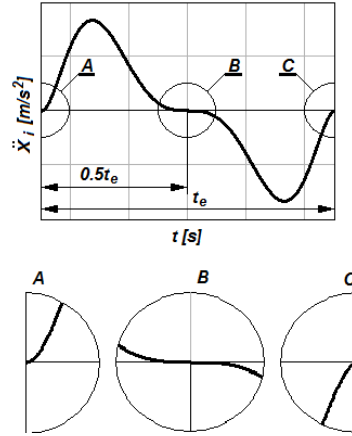
$$\ddot{x}_i(t) = -a_i \cdot (t)^2 \cdot (t - 0.5t_e)^3 \cdot (t - t_e)^2 \quad (1)$$

gdzie:  $a_i$  – współczynnik wielomianu na współrzędnej  $x_i$ ,

$i = 1, 2, 3$  – numer współrzędnej,

$t_e$  – czas końca ruchu.

Profil przyspieszenia opisanego wielomianem siódmego stopnia przedstawia rys. 1.



**Rys. 1.** Profil przyspieszenia opisany wielomianem 7 stopnia

Profil przyspieszenia jest funkcją ciągłą na każdej współrzędnej kartezjańskiego układu współrzędnych –  $x_i$ . Zmiana fazy rozruchu na fazę hamowania następuje w czasie  $t=0.5t_e$ . Jednocześnie profil przyspieszenia w chwilach  $t=0$ ,  $t=0.5t_e$  oraz  $t=t_e$  jest styczny do osi czasu. W ten sposób, w punktach tych eliminowane jest zjawisko udaru. Wielomiany opisujące profile prędkości i przemieszczenia, wyznaczone w wyniku analitycznego całkowania zależności (1), przedstawiają się następująco:

$$\dot{x}_i(t) = -a_i \cdot \left( \frac{1}{8}t^8 - \frac{1}{2}t_e t^7 + \frac{19}{24}t_e^2 t^6 - \frac{5}{8}t_e^3 t^5 + \frac{1}{4}t_e^4 t^4 - \frac{1}{24}t_e^5 t^3 \right) \quad (2)$$

$$x_i(t) = -a_i \cdot \left( \frac{1}{72}t^9 - \frac{1}{16}t_e t^8 + \frac{19}{168}t_e^2 t^7 - \frac{5}{48}t_e^3 t^6 + \frac{1}{20}t_e^4 t^5 - \frac{1}{96}t_e^5 t^4 \right) \quad (3)$$

Wyznaczona wielkość  $x_i(t)$  jest drogą przebytą przez chwytak na współrzędnej  $i$ . Aby określić współrzędną chwytaka w dowolnej chwili czasu, należy uwzględnić początkową współrzędną chwytaka na współrzędnej  $i$  – oznaczoną  $x_{bi}$  oraz kierunek ruchu chwytaka zgodny bądź przeciwny do zwrotu wersora osi  $i$ .

Współrzędną chwytaka na współrzędnej  $i$  określa wówczas równanie

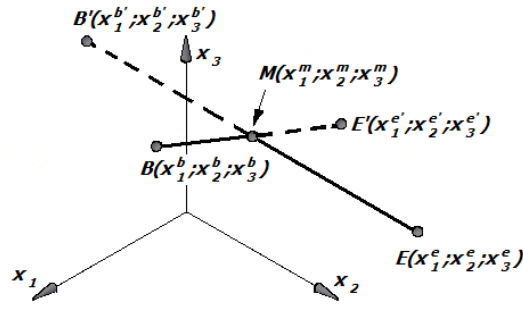
$$x_i(t) = x_{bi} \pm a_i \cdot \left( \frac{1}{72}t^9 - \frac{1}{16}t_e t^8 + \frac{19}{168}t_e^2 t^7 - \frac{5}{48}t_e^3 t^6 + \frac{1}{20}t_e^4 t^5 - \frac{1}{96}t_e^5 t^4 \right) \quad (4)$$

Jeżeli ruch chwytaka jest zgodny z wersorem osi  $i$  to w równaniu należy uwzględnić znak plus, w przeciwnym przypadku znak minus.

### 3. Planowanie trajektorii ruchu z punktem pośrednim

#### 3.1. Polynomial Cross Method (PCM)

PCM ma zastosowanie do planowania ruchu chwytaka, którego tor składa się z dwóch połączonych odcinków prostoliniowych  $BM$  i  $ME$  (rys. 2). Wprowadzenie wielomianowego profilu przyspieszenia chwytaka, określonego zależnością (1), na zaplanowanych odcinkach toru  $BM$  i  $ME$  spowodowałoby, że w punkcie pośrednim prędkość chwytaka wynosiłaby zero. Problem planowania trajektorii ruchu uprościłby się wówczas do ruchu z zatrzymaniem w punkcie pośrednim  $M$ .



**Rys. 2.** Planowany tor ruchu  $BME$  i odcinki pomocnicze  $ME'$  i  $B'M$

Z tego względu wprowadza się pomocnicze punkty  $E'$  i  $B'$ . Punkt  $E'$  powstaje przez symetrię osiową punktu  $B$  względem punktu pośredniego  $M$ , natomiast punkt  $B'$  powstaje w wyniku symetrii osiowej punktu  $E$  względem punktu pośredniego  $M$ . Do opisu przyspieszenia określonego zależnością (1) wykorzystywane są odcinki  $BE'$  oraz  $B'E$  (nazywane w algorytmie całkowitymi). Na obydwu odcinkach całkowitych zmiana fazy rozruchu na fazę hamowania następuje w punkcie pośrednim  $M$ . Wartość maksymalnego przyspieszenia chwytaka ograniczono na współrzędnej o maksymalnym przyroście drogi do wartości  $a_{max}$ . Założono, że przy przejściu z odcinka  $BM$  na odcinek  $ME$  (w punkcie pośrednim  $M$ ) wartość wypadkowej prędkości nie ulega zmianie, a wartość wypadkowego przyspieszenia jest równa zero. Zmiana kierunku i zwrotu wektora prędkości w punkcie  $M$ , wynika z przyjętego toru ruchu chwytaka. W punkcie tym następuje obrót wektora prędkości wypadkowej z kierunku  $BM$  na kierunek  $ME$ . Problem ten może zostać wyeliminowany poprzez wprowadzenie łuku łączącego odcinki prostoliniowe lub przez alternatywne zatrzymanie w punkcie pośrednim. Współczynniki wielomianów opisujących profil przyspieszenia na odcinkach całkowitych wyznacza się oddzielnie na każdej współrzędnej  $x_i$ . Czas trwania ruchu oblicza się wykorzystując jedynie przyrosty drogi oraz założone przyspieszenie maksymalne –  $a_{max}$ . Wartość prędkości w punkcie pośrednim wyznacza się podstawiając do zależności określającej profil prędkości czas  $t = 0.5t_e$ . Wypadkowy wektor prędkości w punkcie pośrednim przenosi się z jednego odcinka na drugi i rzutuje na osie nieruchomego układu współrzędnych. Umożliwia to, wyznaczenie współczynników wielomianu opisującego profil przyspieszenia na drugim odcinku całkowitym. Ponieważ czas ruchu na obu odcinkach całkowitych może być różny, należy także dokonać odpowiedniego przesunięcia w czasie profili przyspieszenia, prędkości, przemieszczenia i udaru.

### 3.2. Algorytm metody PCM

#### 3.2.1. Obliczenia wstępne

**Krok 1.** Założenie współrzędnych punktu początkowego, pośredniego oraz końcowego i oznaczenie ich:  $B(x_1^b; x_2^b; x_3^b)$ ,  $M(x_1^m; x_2^m; x_3^m)$  i  $E(x_1^e; x_2^e; x_3^e)$ . Punkty te powinny leżeć w przestrzeni roboczej.

**Krok 2.** Wyznaczenie współrzędnych punktów pomocniczych  $B'(x_1^{b'}; x_2^{b'}; x_3^{b'})$  oraz  $E'(x_1^{e'}; x_2^{e'}; x_3^{e'})$  na podstawie zależności:

$$x_i^{b'} = 2x_i^m - x_i^e \quad \text{dla } i = 1, 2, 3 \quad (5)$$

$$x_i^{e'} = 2x_i^m - x_i^b \quad \text{dla } i = 1, 2, 3 \quad (6)$$

Punkty pomocnicze  $B'$  oraz  $E'$  nie muszą spełniać warunku przynależności do przestrzeni roboczej.

**Krok 3.** Wyznaczenie przyrostów drogi na poszczególnych współrzędnych odcinków całkowitych:

$$\Delta x_i^{BE'} = |x_i^{e'} - x_i^b| \quad \text{dla } i = 1, 2, 3 \quad (7)$$

$$\Delta x_i^{B'E} = |x_i^e - x_i^{b'}| \quad \text{dla } i = 1, 2, 3 \quad (8)$$

**Krok 4.** Uszeregowanie obliczonych przyrostów począwszy od największego i oznaczenie indeksem dolnym w nawiasie klamrowym w kolejności uszeregowania

$$\Delta x_{\{1\}}^{BE'} \geq \Delta x_{\{2\}}^{BE'} \geq \Delta x_{\{3\}}^{BE'} \quad (9)$$

$$\Delta x_{\{1\}}^{B'E} \geq \Delta x_{\{2\}}^{B'E} \geq \Delta x_{\{3\}}^{B'E} \quad (10)$$

**Krok 5.** Wyznaczenie maksymalnego przyrostu współrzędnej spośród odcinków  $BE'$  i  $B'E$  i oznaczenie go jako  $\Delta x_{\{1\}}^L$  tzn.

$$\Delta x_{\{1\}}^L = \max\{\Delta x_{\{1\}}^{BE'}, \Delta x_{\{1\}}^{B'E}\} \quad (11)$$

W oznaczeniu  $\Delta x_{\{1\}}^L$  indeks górny oznacza dłuższy odcinek całkowity. Jeżeli przyrosty  $\Delta x_{\{1\}}^{BE'} = \Delta x_{\{1\}}^{B'E}$  są równe to należy przyjąć  $\Delta x_{\{1\}}^{BE'} = \Delta x_{\{1\}}^L$ .

**Krok 6.** Założenie maksymalnego przyspieszenia chwytaka  $a_{max}$  na współrzędnej o maksymalnym przyroście drogi  $\Delta x_{\{1\}}^L$ . Przyspieszenia na pozostałych współrzędnych nie przekroczą wówczas założonego przyspieszenia  $a_{max}$ , co wynika z mniejszych bądź równych przyrostów drogi na tych współrzędnych.

### 3.2.2. Obliczenia dłuższego odcinka całkowitego (L)

**Krok 1.** Wyznaczenie współczynnika wielomianu  $a_{\{1\}}^L$  oraz czasu trwania ruchu  $t_e^L$  na współrzędnej o największym przyroście drogi -  $\Delta x_{\{1\}}^L$  wymaga rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} \frac{1}{c_1} a_{\{1\}}^L (t_e^L)^9 = \Delta x_{\{1\}}^L \\ -a_{\{1\}}^L (c_2 t_e^L)^2 (c_2 t_e^L - 0.5 t_e^L)^3 (c_2 t_e^L - t_e^L)^2 = a_{max} \end{cases} \quad (12)$$

Rozwiązanie powyższego układu równań jest następujące:

$$a_{\{1\}}^L = \frac{c_1}{(\sqrt{c_1 c_3})^9} \cdot \frac{a_{max}^5}{\sqrt{a_{max} (\Delta x_{\{1\}}^L)^3} \sqrt{\Delta x_{\{1\}}^L}} \quad (13)$$

$$t_e^L = \frac{\sqrt{c_1 c_3} \sqrt{a_{max} \Delta x_{\{1\}}^L}}{a_{max}} \quad (14)$$

gdzie:

$$c_1 = 10080, \quad c_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{14} \sqrt{21}, \quad c_3 = -\frac{1}{8} c_2^2 (2c_2 - 1)^3 (c_2 - 1)^2.$$

**Krok 2.** Wyznaczenie współczynników wielomianu na pozostałych współrzędnych [1]

$$a_{\{i\}}^L = \frac{c_1}{(t_e^L)^9} \Delta x_{\{i\}}^L \quad \text{dla } i = 2, 3 \quad (15)$$

**Krok 3.** Wyznaczenie składowych oraz wypadkowej prędkości chwytaka w punkcie  $M$

$$\dot{x}_{\{i\}M}^L = \frac{(t_e^L)^8}{6144} a_{\{i\}}^L \quad \text{dla } i = 1, 2, 3 \quad (16)$$

$$\dot{x}_M^L = \frac{(t_e^L)^8}{6144} \sqrt{\sum_{i=1}^3 (a_{i1}^L)^2} \quad (17)$$

### 3.2.3. Obliczenia krótszego odcinka całkowitego (S)

**Krok 1.** Wyznaczenie kosinusów kierunkowych między wektorem prędkości w punkcie  $M$ , a osiami nieruchomego układu współrzędnych

$$\cos(\alpha_i) = \frac{x_i^{e'} - x_i^b}{\sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i^{e'} - x_i^b)^2}} \quad \text{jeżeli } \Delta x_{(1)}^{B'E} > \Delta x_{(1)}^{BE'} \quad (18)$$

$$\cos(\alpha_i) = \frac{x_i^e - x_i^{b'}}{\sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i^e - x_i^{b'})^2}} \quad \text{jeżeli } \Delta x_{(1)}^{B'E} \leq \Delta x_{(1)}^{BE'} \quad (19)$$

gdzie:  $\alpha_i$  – kąt między wektorem prędkości w punkcie  $M$ , a osią  $x_i$  nieruchomego układu współrzędnych.

Zwrot wektora prędkości wynika z kierunku ruchu na odcinku.

**Krok 2.** Wyznaczenie składowych prędkości w punkcie  $M$

$$\dot{x}_{iM}^S = \dot{x}_M \cdot \cos(\alpha_i) \quad \text{dla } i = 1, 2, 3 \quad (20)$$

Zgodnie z założeniem wartość wypadkowej prędkości w punkcie  $M$  na dłuższym i krótszym odcinku nie ulega zmianie  $\dot{x}_M^L = \dot{x}_M^S = \dot{x}_M$ .

**Krok 3.** Wyznaczenie czasu trwania ruchu na krótszym odcinku całkowitym

$$t_e^S = \frac{105 \Delta x_i^S}{64 \dot{x}_{iM}^S} \quad \text{dla } i = 1 \quad (21)$$

Wzór (21) wynika z rozwiązania układu równań zbudowanego z zależności (15) i (16). Ten sam czas ruchu otrzymuje się podstawiając jednocześnie odpowiednie przyrosty współrzędnych i odpowiednie składowe prędkości w punkcie  $M$ .

**Krok 4.** Wyznaczenie współczynników wielomianów na poszczególnych współrzędnych

$$a_i^S = \frac{6144}{(t_e^S)^8} \dot{x}_{iM}^S \quad \text{dla } i = 1, 2, 3 \quad (22)$$

### 3.2.4. Obliczenia końcowe

**Krok 1.** Wyznaczenie czasu rozpoczęcia ruchu na odcinku  $B'E$

$$t_b = \pm \frac{t_e^L - t_e^S}{2} \quad (23)$$

Czas ten wyznacza się po to, by w punkcie  $M$  wystąpiła ta sama prędkość dokładnie w tej samej chwili czasu. Jeżeli  $\Delta x_{(1)}^{B'E} > \Delta x_{(1)}^{BE'}$  to w zależności (23) należy przyjąć znak minus w przeciwnym wypadku znak plus.

**Krok 2.** Przesunięcie w czasie wielomianu określającego profil przyspieszenia na współrzędnych odcinka  $B'E$  o wartość  $t_b$

$$\ddot{x}_i(t) = -a_i^L \cdot (t - t_b)^2 \cdot (t - 0.5t_e^L - t_b)^3 \cdot (t - t_e^L - t_b)^2 \quad \text{jeżeli } \Delta x_{(1)}^{B'E} > \Delta x_{(1)}^{BE'} \quad (24)$$

$$\ddot{x}_i(t) = -a_i^S \cdot (t - t_b)^2 \cdot (t - 0.5t_e^S - t_b)^3 \cdot (t - t_e^S - t_b)^2 \quad \text{jeżeli } \Delta x_{(1)}^{B'E} \leq \Delta x_{(1)}^{BE'} \quad (25)$$

Analogicznego przesunięcia w czasie należy dokonać w przypadku wielomianów określających profil prędkości, przemieszczenia, a także udaru.

**Krok 3.** Wyznaczenie czasu ruchu na odcinkach wzdłuż toru  $BME$

$$t_e = \frac{t_e^L + t_e^S}{2} \quad (26)$$

#### 4. Przykład numeryczny

Współrzędne punktów zaplanowanego toru ruchu chwytaka  $B$ ,  $M$ ,  $E$  oraz pomocniczych punktów  $E'$  i  $B'$  przedstawiono w tab.1. Przyrosty drogi na poszczególnych współrzędnych wynoszą:  $\Delta x_1^{BE'} = 0$ ,  $\Delta x_2^{BE'} = \Delta x_3^{BE'} = 0.5 \text{ m}$ ,  $\Delta x_1^{B'E} = \Delta x_3^{B'E} = 0.5 \text{ m}$ ,  $\Delta x_2^{B'E} = 0$ . Ponieważ  $\Delta x_{(1)}^{BE'} = \Delta x_{(1)}^{B'E}$  stąd  $\Delta x_{(1)}^L = \Delta x_{(1)}^{BE'}$ .

**Tabela 1.** Współrzędne punktów zaplanowanego toru ruchu chwytaka i punktów pomocniczych

Oznaczenie punktu	Współrzędne punktu [m]		
	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$B$	0.5	0.5	1
$M$	0.5	0.75	1.25
$E$	0.75	0.75	1.5
$B'$	0.25	0.75	1
$E'$	0.5	1	1.5

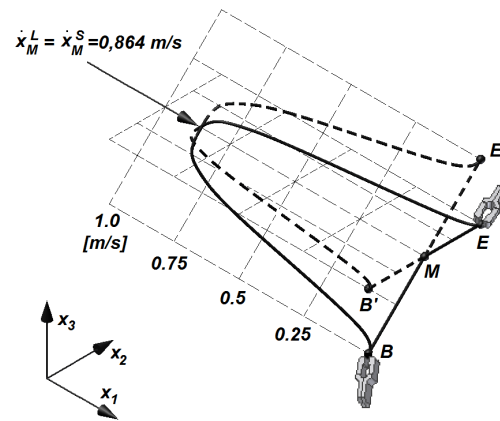
Przyjęto przyspieszenie maksymalne  $a_{max} = 2 \text{ m/s}^2$  na współrzędnej  $x_2$ . Współczynniki wielomianu określającego profil przyspieszenia na poszczególnych współrzędnych oraz czas trwania ruchu wynoszą odpowiednio:  $a_{(1)}^L = a_{(2)}^L = 354.616 \text{ m/s}^2$ ,  $a_{(3)}^L = 0$ ,  $t_e^L = 1.343 \text{ s}$ . Ponieważ na odcinku  $BE'$  najdłuższe przyrosty drogi występują na współrzędnej  $x_2$  oraz  $x_3$ , stąd wyznaczone współczynniki  $a_{(1)}^L$  i  $a_{(2)}^L$  dotyczą odpowiednio tych właśnie współrzędnych. Wypadkowa prędkość w punkcie  $M$  wynosi  $\dot{x}_M^L = 0.864 \text{ m/s}$ . Kosinusy kierunkowe wektora prędkości w punkcie  $M$  odcinka  $B'E$  wynoszą  $\cos\alpha_1 = \sqrt{2}/2$ ,  $\cos\alpha_2 = 0$ ,  $\cos\alpha_3 = \sqrt{2}/2$ . Składowe prędkości w punkcie  $M$  na odcinku  $B'E$  wynoszą  $\dot{x}_{1M}^S = \dot{x}_{3M}^S = 0.611 \text{ m/s}$ ,  $\dot{x}_{2M}^S = 0$ , przy czym indeksy 1, 2 i 3 odnoszą się do osi nieruchomego układu współrzędnych. Współczynniki wielomianów określających profil przyspieszenia na poszczególnych współrzędnych odcinka  $B'E$  wynoszą  $a_1^S = a_3^S = 354.616 \text{ m/s}^2$ ,  $a_2^S = 0$ . Czas trwania ruchu na odcinku  $B'E$  wynosi  $t_e^S = 1.343 \text{ s}$ . Czas ruchu wzdłuż toru  $BME$  wynosi  $t_e = 1.343 \text{ s}$ , zaś  $t_b = 0$ .

#### 5. Wyniki symulacji

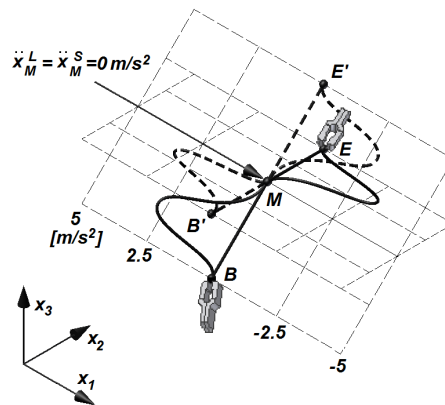
W wyniku przeprowadzonych symulacji uzyskano przebiegi kinematycznych charakterystyk ruchu chwytaka, które przedstawiono na rys. 3-5. Na każdym z przedstawionych rysunków linią ciągłą oznaczono przebiegi kinematycznych charakterystyk ruchu planowanego toru  $BME$ , natomiast linią przerywaną przebiegi na odcinkach pomocniczych ( $ME'$  i  $B'M$ ). Planowany tor ruchu i odcinki pomocnicze przedstawiono w nieruchomym układzie współrzędnych  $x_1x_2x_3$ , natomiast kinematyczne charakterystyki ruchu przedstawiono w dwóch płaszczyznach prostopadłych do płaszczyzny wyznaczonej przez punkty planowanego toru  $BME$ .

Na rys. 3 przedstawiono przebiegi prędkości chwytaka na odcinkach  $BE'$  i  $B'E$ . Maksymalna prędkość  $\dot{x}_M^L = \dot{x}_M^S = 0.864 \text{ m/s}$  osiągana jest w punkcie  $M$ . Wartość prędkości

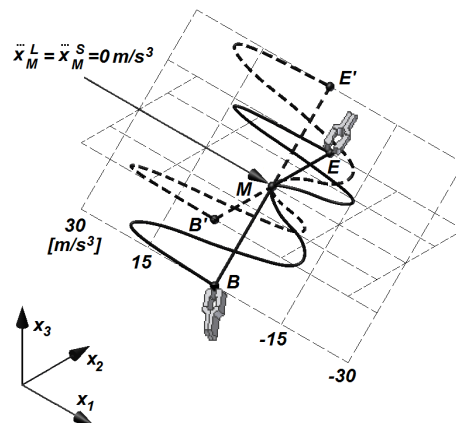
przy przejściu z odcinka  $BM$  na  $ME$  nie ulega zmianie, natomiast wektor prędkości wypadkowej zmienia kierunek z  $BM$  na  $ME$ .



**Rys. 3.** Przebieg prędkości wypadkowej na zaplanowanym torze  $BME$  i odcinkach pomocniczych



**Rys. 4.** Przebieg przyspieszenia wypadkowego na zaplanowanym torze  $BME$  i na odcinkach pomocniczych



**Rys. 5.** Przebieg uderu wypadkowego na zaplanowanym torze  $BME$  i na odcinkach pomocniczych

Przebiegi wypadkowego przyspieszenia liniowego chwytaka na odcinkach  $BE'$  i  $B'E$  przedstawione są na rys. 4. W punktach  $B$ ,  $M$  i  $E$  przyspieszenie jest równe zero. Osiągana bezwzględna wartość maksymalna przyspieszenia na poszczególnych współrzędnych nie przekracza wartości założonej  $a_{max} = 2 \text{ m/s}^2$ , a maksymalna wypadkowa wartość wynosi  $2,83 \text{ m/s}^2$ . Wartość uderu w punktach  $B$  i  $E$  jest równa zero (rys. 5). Maksymalna wartość uderu wynosi  $19,8 \text{ m/s}^3$ .



#### 4. Wnioski

Na podstawie przeprowadzonej symulacji ruchu chwytaka wg metody PCM sformułowano następujące wnioski:

- a) Przebiegi wypadkowej prędkości, przyspieszenia i uderu otrzymane przy wykorzystaniu PCM są funkcjami ciągłymi na odcinkach  $BM$  i  $ME$ . W punkcie pośrednim  $M$  wartość wypadkowej prędkości nie ulega zmianie, zgodnie z przyjętym założeniem. Kierunek wektora prędkości zmienia się z kierunkiem ruchu (z  $BM$  na  $ME$ ).
- b) Planowanie trajektorii według PCM można wykorzystać w niektórych procesach technologicznych (przenoszenie, malowanie, montaż, spawanie, zgrzewanie liniowe, uszczelnianie, klejenie, paletyzacja i depaletyzacja), gdzie szczególnie istotne jest wyeliminowanie uderu w początkowym i końcowym punkcie toru ruchu.
- c) W przypadku uwzględnienia odkształcalności łańcucha kinematycznego, wyeliminowanie uderu powinno wpłynąć na ograniczenie drgań i zwiększenie dokładności pozycjonowania.

Przedmiotem dalszych badań będzie wpływ trajektorii ruchu chwytaka (planowanej na podstawie metody PCM) na kinematykę i dynamikę manipulatora.

#### Bibliografia

1. Boryga M., Graboś A. Planning of manipulator motion trajectory with higher-degree polynomials use. *Mechanism and Machine Theory* 2009; 44: 1400-1419.
2. Choi Y.K., Park J.H., Kim H.S., Kim J.H. Optimal trajectory planning and sliding mode control for robots using evolution strategy. *Robotica* 2000; 18: 423-428.
3. Dyllong E., Visioli A. Planning and real-time modifications of a trajectory using spline techniques. *Robotica* 2003; 1: 475-482.
4. Gasparetto A., Zanutto V. Optimal trajectory planning for industrial robots. *Advances in Engineering Software* 2010; 41: 548-556.
5. Huang P., Xu Y., Liang B. Global minimum-jerk trajectory planning of space manipulator. *International Journal of Control, Automation, and Systems* 2006; 4 no. 4: 405-413.
6. Olabi A., Béarée R., Gibaru O., Damak M. Feedrate planning for machining with industrial six-axis robots. *Control Engineering Practice* 2010; 18(5): 471-482.
7. Red E. A dynamic optimal trajectory generator for Cartesian Path following. *Robotica* 2000; 18: 451-458.
8. Rubio F.J., Valero F.J., Suñer J.L., Mata V. Simultaneous algorithm to solve the trajectory planning problem. *Mechanism and Machine Theory* 2009; 44: 1910-1922.
9. Saramago S.F.P., Ceccarelli M. An optimum robot path planning with payload constraints. *Robotica* 2002; 20: 395-404.
10. Visioli A. Trajectory planning of robot manipulators by using algebraic and trigonometric splines. *Robotica* 2000; 18: 611-631.