

prof. dr hab. inż. Tomaszek Henryk  
Instytut Techniczny Wojsk Lotniczych, ul. Księcia Bolesława 6, 01-494 Warszawa,  
tel. +48 22 685 19 56

dr inż. Jaształ Michał  
Wojskowa Akademia Techniczna, ul. Kaliskiego 2, 00-908 Warszawa,  
[mjasztal@wat.edu.pl](mailto:mjasztal@wat.edu.pl), tel. +48 22 683 77 89

dr inż. Zieja Mariusz  
Instytut Techniczny Wojsk Lotniczych, ul. Księcia Bolesława 6, 01-494 Warszawa,  
[mariusz.zieja@itwl.pl](mailto:mariusz.zieja@itwl.pl), tel. +48 22 685 19 13

## **Uproszczona metoda oceny trwałości zmęczeniowej wybranych elementów konstrukcji statku powietrznego dla zmiennego widma obciążenia**

**Słowa kluczowe:** cykl obciążenia, ważony cykl obciążenia, niezawodność, trwałość, widmo obciążenia.

**Streszczenie:** Ocena trwałości zmęczeniowej elementu konstrukcji pracującego pod wpływem zmiennego widma obciążenia przysparza wielu trudności. Stąd potrzeba poszukiwania uproszczonych metod umożliwiających tą ocenę. Przedstawiona praca obejmuje przekształcenie widma rzeczywistego o zmiennych wartościach cykli w widmo jednorodne o cyklach ważonych. Wykorzystując widmo przekształcone przedstawiono metodę oceny trwałości zmęczeniowej wybranego elementu konstrukcji statku powietrznego z początkowym pęknięciem. Do modelowania przyrostu długości pęknięcia wykorzystano równanie różnicowe z którego po przekształceniu otrzymano równanie różniczkowe cząstkowe typu Fokkera-Plancka. Rozwiązaniem szczególnym tego równania jest funkcja gęstości długości pęknięcia elementu. Wykorzystując następnie funkcję gęstości długości pęknięcia określono trwałość zmęczeniową elementu konstrukcji dla pęknięcia narastającego do wartości dopuszczalnej  $l_d$  mniejszej od wartości krytycznej  $l_{kr}$ . W pracy rozpatruje się przypadek, gdy wykładnik równania Parisa  $m \neq 2$ .

### **1. Wprowadzenie**

Ocena trwałości zmęczeniowej elementu konstrukcji pracującego pod wpływem zmiennego widma obciążenia przysparza wielu trudności, ale jest bardzo potrzebna z uwagi na bezpieczeństwo lotów. W niniejszym artykule podjęto próbę poszukiwania metody

uproszczonej. Uproszczenie to polega na przekształceniu zmiennego widma obciążenia w widmo jednorodne o cyklach ważonych. Zarys sposobu przekształcenia podany jest w punkcie 2.

Przyjmuje się, że początkowe pęknięcie w elemencie konstrukcji wynosi  $l_0$ , które pod wpływem obciążenia o zmiennym widmie wzrasta do długości dopuszczalnej  $l_d$  (bezpiecznej) mniejszej od długości krytycznej  $l_{kr}$ . Przyjmuje się, że prędkość narastania pęknięcia w ujęciu deterministycznym opisana jest zależnością Parisa [1]:

$$\frac{dl}{dN} = C(\Delta K)^m \quad (1)$$

gdzie:  $\Delta K$  - zakres zmian współczynnika intensywności naprężeń,

$C, m$  – stałe materiałowe,

$N$  – zmienna oznaczająca liczbę cykli obciążenia elementu konstrukcji.

## 2. Wyznaczenie prędkości pęknięcia dla obciążenia w postaci przekształconego widma obciążenia elementu

W przekształceniu widma rzeczywistego o zmiennych wartościach obciążenia w widmo jednorodne o cyklach ważonych przyjmuje się nw. ustalenia:

- 1) Element konstrukcji statku powietrznego pracuje w czasie wykonywania zadań pod zmiennym obciążeniem.
- 2) Dysponujemy widmem obciążenia w czasie trwania standardowego lotu statku powietrznego.
- 3) Zakładamy, że posiadane widmo pozwala wyznaczyć:
  - całkowitą liczbę cykli obciążenia  $N_c$  w czasie trwania jednego lotu,
  - w widmie jest  $L$  progów o maksymalnej wartości obciążenia  $\sigma_1^{max}, \sigma_2^{max}, \dots, \sigma_L^{max}$
- 4) Liczba powtórzeń maksymalnych wartości progowych w przyjętym widmie jest następująca:  
 $\sigma_1^{max}$  występuje  $n_1$  razy,  $\sigma_2^{max}$  występuje  $n_2$  razy, ...,  $\sigma_L^{max}$  występuje  $n_L$  razy.  
Liczba powtórzeń określonych wartości progowych obciążenia w jednym locie wynosi  
 $N_c = \sum_{i=1}^L n_i$ ,
- 5) Wartość minimalną w progach określa się według zależności:

$$\sigma_{i,\dot{s}r}^{min} = \frac{\sigma_{i,1}^{min} + \sigma_{i,2}^{min} + \dots + \sigma_{i,n_i}^{min}}{n_i}, \text{ gdzie } i = 1, 2, \dots, n_i$$

- 6) Tabela 1 zawiera zestawienie maksymalnych  $\sigma_i^{max}$  i minimalnych  $\sigma_{i,\dot{s}r}^{min}$  wartości naprężeń w cyklach oraz częstości ich występowania  $P_i$ :

Tabela 1. Zestawienie maksymalnych  $\sigma_i^{max}$  i minimalnych  $\sigma_{i,\dot{s}r}^{min}$  wartości naprężeń w cyklach oraz częstości ich występowania  $P_i$

$\sigma_i^{max}$	$\sigma_1^{max}$	$\sigma_2^{max}$	...	$\sigma_i^{max}$	...	$\sigma_L^{max}$
$\sigma_{i,\dot{s}r}^{min}$	$\sigma_{1,\dot{s}r}^{min}$	$\sigma_{2,\dot{s}r}^{min}$	...	$\sigma_{i,\dot{s}r}^{min}$	...	$\sigma_{L,\dot{s}r}^{min}$
$P_i$	$P_1 = \frac{n_1}{N_c}$	$P_2 = \frac{n_2}{N_c}$	...	$P_i = \frac{n_i}{N_c}$	...	$P_L = \frac{n_L}{N_c}$

- 7) Ustalenie współczynników asymetrii cykli zestawione zostało w tabeli 2:

Tabela 2. Zestawienie współczynników asymetrii cyklu  $\hat{R}_i$  oraz współczynników  $U_i$  uwzględniających ich wpływ na prędkość pęknięcia

cykl $i$	1	2	...	$i$	...	$L$
$\hat{R}_i$	$\hat{R}_1$	$\hat{R}_2$	...	$\hat{R}_i$	...	$\hat{R}_L$
$U_i$	$U_1$	$U_2$	...	$U_i$	...	$U_L$

gdzie:  $\hat{R}_i = \frac{\sigma_{i,\dot{s}r}^{min}}{\sigma_i^{max}}$ ,  $U_i = \alpha_1 + \alpha_2 \hat{R}_i + \alpha_3 \hat{R}_i^2$ ;  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  – współczynniki empiryczne [4], [5].

- 8) Ustalenie zakresu zmian naprężenia zestawione zostało w tabeli 3:

$$\Delta\sigma_i = \sigma_i^{max} - \sigma_{i,\dot{s}r}^{min}$$

Tabela 3. Zestawienie wartości zakresu zmian naprężeń  $\Delta\sigma_i$  oraz częstości ich występowania  $P_i$

typy cykli	1	2	...	$i$	...	$L$
$\Delta\sigma_i$	$\Delta\sigma_1$	$\Delta\sigma_2$	...	$\Delta\sigma_i$	...	$\Delta\sigma_L$
$P_i$	$P_1$	$P_2$	...	$P_i$	...	$P_L$

- 9) Uwzględnienie wpływu cykli przeciążeniowych na wzrost pęknięcia (tabela 4):

$$\Delta\sigma_{i,ef} = C_i^P \Delta\sigma_i$$

gdzie  $C_i^P$  – współczynnik spowolnienia wzrostu pęknięcia po wystąpieniu cykli przeciążeniowych [3].

Tabela 4. Zestawienie wartości zakresu zmian naprężeń efektywnych  $\Delta\sigma_{i,ef}$  uwzględniających występowanie cykli przeciążających

<i>typy cykli</i>	1	2	...	<i>i</i>	...	<i>L</i>
<i>współczynniki</i>	$C_1^P$	$C_2^P$	...	$C_i^P$	...	$C_L^P$
$\Delta\sigma_{i,ef}$	$\Delta\sigma_{1,ef}$	$\Delta\sigma_{2,ef}$	...	$\Delta\sigma_{i,ef}$	...	$\Delta\sigma_{L,ef}$

W tym przypadku przyjmujemy również, że prędkość narastania pęknięcia elementu konstrukcji następuje według zależności Parisa określonej wzorem (1). Dla przyjętych wyżej ustaleń zależność (1) w tym przypadku dla *i*-tego typu cyklu obciążenia (otrzymanego z opisu widma obciążenia w cyklu standardowym) przyjmuje następującą postać:

$$\frac{dl}{dN} = C U_i M_k^m (\Delta\sigma_{i,ef})^m \pi^{\frac{m}{2}} l^{\frac{m}{2}}, \quad (2)$$

gdzie  $M_k$  - wielkość określająca wpływ położenia pęknięcia w elemencie konstrukcyjnym oraz jego wymiarów w stosunku do wymiarów całego elementu [1].

Zależność (2) po uwzględnieniu wszystkich typów cykli obciążeniowych przyjmuje postać:

$$\frac{dl}{dN} = C \pi^{\frac{m}{2}} \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i (\Delta\sigma_{i,ef})^m \right) M_k^m l^{\frac{m}{2}} \quad (3)$$

gdzie  $i = 1, 2, \dots, L$

Zależność (3) można wyrazić w funkcji czasu lub dokładniej w funkcji nalotu statku powietrznego. W tym celu przyjmujemy:

$$N = \lambda t \quad (4)$$

gdzie:

$\lambda$  – intensywność pojawiania się cykli obciążenia elementu konstrukcji;

$N$  – liczba cykli obciążenia;

$t$  – nalot statku powietrznego.

W naszym przypadku  $\lambda = 1/\Delta t$  gdzie  $\Delta t$  jest czasem trwania zmęczeniowego cyklu obciążenia elementu. Roboczy wzór dla określenia  $\Delta t$  można przyjąć:

$$\Delta t = \frac{T}{N_c} \quad (5)$$

gdzie:

$T$  – czas trwania lotu standardowego statku powietrznego przy ustalaniu widma obciążenia,

$N_c$  – liczba cykli w standardowym widmie obciążenia.

Po tych przekształceniach wzór (3) przyjmuje postać:

$$\frac{dl}{dt} = \lambda C \pi^{\frac{m}{2}} \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i (\Delta \sigma_{i,ef})^m \right) M_k^m l^{\frac{m}{2}} \quad (6)$$

Wzór (6) charakteryzuje prędkość narastania pęknięcia dla widma jednorodnego z cyklami warzonymi jednego typu.

### 3. Określenie funkcji gęstości długości pęknięcia elementu

Niech  $U_{l,t}$  oznacza prawdopodobieństwo, że dla nalotu statku równego  $t$  długość pęknięcia elementu wynosi  $l$ . Równanie różnicowe dla powyższych ustaleń przyjmuje postać [2], [6]:

$$U_{l,t+\Delta t} = (1 - \lambda \Delta t) U_{l,t} + \lambda \Delta t U_{l-\Delta l,t} \quad (7)$$

gdzie  $\Delta l$  – przyrost pęknięcia w czasie jednego cyklu zastępczego.

Wartość przyrostu długości pęknięcia na podstawie wzoru (6) będzie:

$$\Delta l = \lambda C \pi^{\frac{m}{2}} \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i (\Delta \sigma_{i,ef})^m \right) M_k^m l^{\frac{m}{2}} \Delta t \quad (8)$$

Równanie (7) w zapisie funkcyjnym przyjmuje postać:

$$U(l, t + \Delta t) = (1 - \lambda \Delta t) U(l, t) + \lambda \Delta t U(l - \Delta l, t) \quad (9)$$

gdzie  $U(l, t)$  – funkcja gęstości długości pęknięcia po nalocie wynoszącym  $t$  określonym w godzinach lotu;

$(1 - \lambda \Delta t)$  – prawdopodobieństwo, że w czasie o długości  $\Delta t$  nie wystąpi zastępczy cykl obciążenia;

$\lambda \Delta t$  – prawdopodobieństwo tego, że w czasie o długości  $\Delta t$  wystąpi zastępczy cykl obciążeniowy.

Równanie (9) przekształcimy w równanie różniczkowe cząstkowe. W tym celu przyjmujemy następujące przybliżenia:

$$\left. \begin{aligned} U(l, t + \Delta t) &\cong U(l, t) + \frac{\partial U(l, t)}{\partial t} \Delta t \\ U(l - \Delta l, t) &\cong U(l, t) - \frac{\partial U(l, t)}{\partial l} \Delta l + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U(l, t)}{\partial l^2} (\Delta l)^2 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Podstawiając (10) do (9) otrzymujemy:

$$\frac{\partial U(l,t)}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial U(l,t)}{\partial l} \Delta l + \frac{1}{2} \lambda (\Delta l)^2 \frac{\partial^2 U(l,t)}{\partial l^2} \quad (11)$$

gdzie:

$$\Delta l = \lambda C \pi^{\frac{m}{2}} \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i (\Delta \sigma_{i,ef})^m \right) M_k^m l^{\frac{m}{2}} \Delta t$$

Ponieważ,  $\lambda \Delta t = 1$ , stąd:

$$\Delta l = C \pi^{\frac{m}{2}} \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i (\Delta \sigma_{i,ef})^m \right) M_k^m l^{\frac{m}{2}} \quad (12)$$

$$\text{Niech: } C \pi^{\frac{m}{2}} M_k^m = C_m \quad (13)$$

$$\Delta l = C_m \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i (\Delta \sigma_{i,ef})^m \right) l^{\frac{m}{2}} \quad (14)$$

Podstawiając zależność (14) do równania (11) otrzymujemy

$$\frac{\partial U(l,t)}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial U(l,t)}{\partial l} C_m \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i (\Delta \sigma_{i,ef})^m \right) l^{\frac{m}{2}} + \frac{1}{2} \lambda \left( C_m \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i (\Delta \sigma_{i,ef})^m \right) l^{\frac{m}{2}} \right)^2 \frac{\partial^2 U(l,t)}{\partial l^2} \quad (15)$$

W równaniu (15) należy za długość pęknięcia  $l$  podstawić wynik rozwiązania równania (6)

$$\frac{dl}{dt} = \lambda C \pi^{\frac{m}{2}} M_k^m \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i (\Delta \sigma_{i,ef})^m \right) l^{\frac{m}{2}}$$

$$\int_{l_0}^l \frac{dx}{x^{\frac{m}{2}}} = \int_0^t \lambda C_m \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i (\Delta \sigma_{i,ef})^m \right) dt$$

$$\frac{2}{2-m} l^{\frac{2-m}{2}} - \frac{2}{2-m} l_0^{\frac{2-m}{2}} = \lambda C_m \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i (\Delta \sigma_{i,ef})^m \right) t$$

$$\frac{2}{2-m} l^{\frac{2-m}{2}} = \frac{2}{2-m} l_0^{\frac{2-m}{2}} + \lambda C_m \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i (\Delta \sigma_{i,ef})^m \right) t$$

$$l = \left[ l_0^{\frac{2-m}{2}} + \frac{2-m}{2} \lambda C_m \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i (\Delta \sigma_{i,ef})^m \right) t \right]^{\frac{2}{2-m}} \quad (16)$$

Uwzględniając (16) to współczynniki równania (15) można zapisać następująco:

$$\alpha(t) = \lambda C_m \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i (\Delta \sigma_{i,ef})^m \right) \left[ l_0^{\frac{2-m}{2}} + \frac{2-m}{2} \lambda C_m \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i (\Delta \sigma_{i,ef})^m \right) t \right]^{\frac{m}{2-m}} \quad (17)$$

$$\beta(t) = \lambda \left[ C_m \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i (\Delta \sigma_{i,ef})^m \right) \left[ l_0^{\frac{2-m}{2}} + \frac{2-m}{2} \lambda C_m \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i (\Delta \sigma_{i,ef})^m \right) t \right]^{\frac{m}{2-m}} \right]^2 \quad (18)$$

Równanie (15) ze współczynnikami w postaci zależności (17) i (18) przyjmuje następującą postać dla  $m \neq 2$ :

$$\frac{\partial U(l,t)}{\partial t} = -\alpha(t) \frac{\partial U(l,t)}{\partial l} + \frac{1}{2} \beta(t) \frac{\partial^2 U(l,t)}{\partial l^2} \quad (19)$$

Rozwiązanie szczególne równania (19) przyjmuje następującą postać [2], [6]:

$$U(l,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi A(t)}} e^{-\frac{(l-B(t))^2}{2A(t)}} \quad (20)$$

gdzie:

$$B(t) = \int_0^t \alpha(t) dt \quad (21)$$

$$A(t) = \int_0^t \beta(t) dt \quad (22)$$

Obliczenie całki (21):

$$\begin{aligned} B(t) &= \lambda C_m (\sum_{i=1}^L P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^m) \int_0^t \left[ l_0^{\frac{2-m}{2}} + \frac{2-m}{2} \lambda C_m (\sum_{i=1}^L P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^m) t \right]^{\frac{m}{2-m}} dt = \\ &= \lambda C_m (\sum_{i=1}^L P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^m) \frac{1}{\left(\frac{m}{2-m}+1\right)} \left[ l_0^{\frac{2-m}{2}} + \frac{2-m}{2} \lambda C_m (\sum_{i=1}^L P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^m) t \right]^{\frac{m}{2-m}+1} \cdot \\ &\cdot \frac{1}{\frac{2-m}{2} \lambda C_m (\sum_{i=1}^L P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^m)} \Big|_0^t = \\ &= \left[ l_0^{\frac{2-m}{2}} + \frac{2-m}{2} \lambda C_m (\sum_{i=1}^L P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^m) t \right]^{\frac{2}{2-m}} - l_0 \end{aligned}$$

Czyli  $B(t)$  jest wartością średnią długości pęknięcia dla nalotu równego  $t$ . Wzór obliczeniowy przyjmuje postać:

$$B(t) = \left[ l_0^{\frac{2-m}{2}} + \frac{2-m}{2} \lambda C_m (\sum_{i=1}^L P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^m) t \right]^{\frac{2}{2-m}} - l_0 \quad (23)$$

Obliczenie całki (22):

$$\begin{aligned} A(t) &= \lambda C_m^2 (\sum_{i=1}^L P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^m)^2 \int_0^t \left[ l_0^{\frac{2-m}{2}} + \frac{2-m}{2} \lambda C_m (\sum_{i=1}^L P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^m) t \right]^{\frac{2m}{2-m}} dt = \\ &= \lambda C_m^2 (\sum_{i=1}^L P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^m)^2 \frac{1}{\left(\frac{2m}{2-m}+1\right)} \left[ l_0^{\frac{2-m}{2}} + \frac{2-m}{2} \lambda C_m (\sum_{i=1}^L P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^m) t \right]^{\frac{2m}{2-m}+1} \cdot \\ &\cdot \frac{1}{\frac{2-m}{2} \lambda C_m (\sum_{i=1}^L P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^m)} \Big|_0^t = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda C_m^2 \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^m \right)^2 \frac{1}{\left(\frac{m+2}{m-2}\right)} \left[ l_0^{\frac{2-m}{2}} + \frac{2-m}{2} \lambda C_m \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^m \right) t \right]^{\frac{m+2}{m-2}} \\
&\cdot \frac{1}{\frac{2-m}{2} \lambda C_m \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^m \right)} \Big|_0^t = \\
&= C_m \frac{2}{m+2} \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^m \right) \left[ l_0^{\frac{2-m}{2}} + \frac{2-m}{2} \lambda C_m \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^m \right) t \right]^{\frac{m+2}{m-2}} + \\
&- C_m \frac{2}{m+2} \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^m \right) \left( l_0^{\frac{2-m}{2}} \right)^{\frac{m+2}{m-2}} = \\
&= C_m \frac{2}{m+2} \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^m \right) \left[ \left[ l_0^{\frac{2-m}{2}} + \frac{2-m}{2} \lambda C_m \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^m \right) t \right]^{\frac{m+2}{m-2}} - l_0^{\frac{m+2}{2}} \right]
\end{aligned}$$

Czyli  $A(t)$  jest wariancją wzrostu pęknięcia dla nalotu równego  $t$ . Wzór obliczeniowy ma postać:

$$A(t) = C_m \frac{2}{m+2} \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^m \right) \left[ \left[ l_0^{\frac{2-m}{2}} + \frac{2-m}{2} \lambda C_m \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^m \right) t \right]^{\frac{m+2}{m-2}} - l_0^{\frac{m+2}{2}} \right] \quad (24)$$

#### 4. Określenie trwałości zmęczeniowej wybranego elementu konstrukcji statku powietrznego

Dla wyznaczonej funkcji gęstości długości pęknięcia w funkcji czasu nalotu niezawodność elementu konstrukcji można wyznaczyć z zależności [2], [6]:

$$R(t)_{l_d} = \int_{-\infty}^{l_d} U(l, t) dl \quad (25)$$

gdzie: postać funkcji gęstości długości pęknięcia  $U(l, t)$  określona jest zależnością (20).

Dopuszczalna długość pęknięcia  $l_d$  można określić wykorzystując współczynnik intensywności naprężeń o postaci:

$$K = M_k \sigma \sqrt{\pi l} \quad (26)$$

Współczynnik określony zależnością (26) w przypadku krytycznej długości pęknięcia  $l_{kr}$  i krytycznego naprężenia  $\sigma_{kr}$  staje się wielkością krytyczną  $K_c$  nazywaną odpornością materiału na pęknięcie:

$$K_c = M_k \sigma_{kr} \sqrt{\pi l_{kr}} \quad (27)$$



Wykorzystując zależność (27) i wprowadzając współczynnik bezpieczeństwa, można wyznaczyć wartość dopuszczalną długości pęknięcia:

$$l_d = \frac{K_c^2}{kM_k^2\sigma_{kr}^2\pi} \quad (28)$$

gdzie  $k$  – współczynnik bezpieczeństwa.

Normując podcałkową funkcję w zależności (25) otrzymujemy:

$$R(t)_{l_d} = \int_{-\infty}^{\frac{l_d - B(t)}{\sqrt{A(t)}}} U(z, t) dz \quad (29)$$

gdzie  $B(t)$  i  $A(t)$  określone są zależnościami (23) i (24).

Przyjmując wyznaczony poziom niezawodności odczytujemy w z tablic rozkładu normalnego wartości górnej granicy całki (29). Stąd otrzymujemy zależność:

$$Q_{l_d} = \frac{l_d - B(t)}{\sqrt{A(t)}} \quad (30)$$

gdzie  $Q_{l_d}$  – wartość górnej granicy całki (29) dla której wartość całki będzie równa  $R(t)_{l_d}$ .

Rozwiązując otrzymane równanie z zależności (30) znajdujemy taką wartość nalotu dla którego spełniony jest przyjęty poziom niezawodności.

## 5. Uwagi końcowe wraz z przykładem obliczeniowym

W celu zilustrowania opracowanej metody przedstawiono przykład obliczeniowy prędkości wzrostu średniej długości pęknięcia w elemencie wykonanym ze stali o określonych własnościach materiałowych, poddanego oddziaływaniu rzeczywistego widma obciążenia. Obliczenia prowadzono dla przekształconego w sposób podany w punkcie 2 widma obciążeń zmiennaamplitudowych, które reprezentuje rzeczywiste widmo obciążenia elementu [2]. Wielkości charakteryzujące przekształcone widmo obciążeń zastosowane w badaniach zostało przedstawione w poniższej tabeli 5.

Tabela 5. Wielkości charakteryzujące przekształcone widmo obciążeń

Stopień obciążenia $i$	1	2	3	4	5	6	7
Liczba cykli	1	5	4	10	30	50	140
$\sigma_i^{max}$ [MPa]	186	159	141	129	112	93	72
$\sigma_{i,śr}^{min}$ [MPa]	-28	-13	8	17	23	27	27
Współczynnik $\hat{R}_i$	-0,1505	-0,0818	0,0567	0,1317	0,2053	0,2903	0,375
Zakres naprężenia $\Delta\sigma_{i,ef}$ [MPa]	214	172	133	112	89	66	45
Współczynnik $U_i$	0,5030	0,5238	0,5691	0,5955	0,6228	0,6559	0,6906
Udział stopnia w widmie (częstość występowania) $P_i$	0,0042	0,0208	0,0167	0,0417	0,125	0,2083	0,5833

Tabela 5 zawiera wartości zakresów zmian naprężeń w cyklu  $\Delta\sigma_i$  w przyjętych stopniach obciążenia  $i$  oraz ich częstości występowania  $P_i$  a także współczynniki uwzględniające wpływ asymetrii cyklu na rozwój pęknięcia.

Dla określonego materiału elementu modelowego, do obliczeń przyjęto następujące wartości współczynników materiałowych:

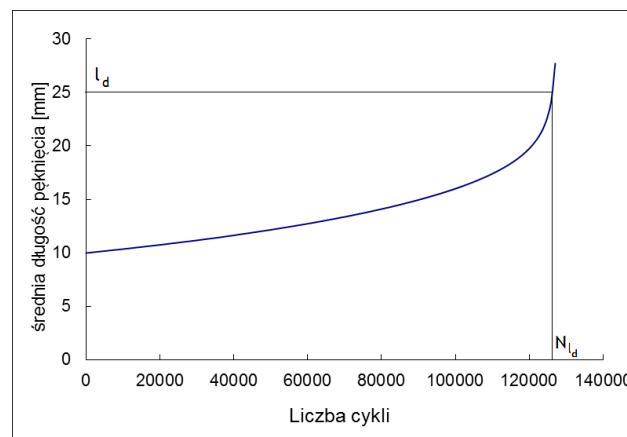
$$m = 3,5$$

$$C = 3,2 \cdot 10^{-12}$$

W prezentowanym przykładzie do obliczeń przyjęto początkową długość pęknięcia elementu  $l_0 = 10\text{mm}$ , natomiast dopuszczalną długość pęknięcia wyznaczono wykorzystując zależność (28) i wynosi ona  $l_d = 25\text{mm}$ . Do obliczeń założono również, że współczynnik spowolnienia wzrostu pęknięcia po wystąpieniu cykli przeciążeniowych  $C_i^P = 1$ , natomiast współczynnik uwzględniający wpływ asymetrii cyklu na rozwój pęknięcia określony jest empirycznym równaniem  $U_i = 0,55 + 0,33\hat{R}_i + 0,12\hat{R}_i^2$ . Zmiana wartości współczynnika  $M_k$  w trakcie rozwoju pęknięcia uwzględniona została w procesie obliczeń numerycznych. Następnie wykorzystano przekształcone równanie (23) na średnią długość pęknięcia uzależniając ją na podstawie równania (4) od liczby cykli obciążenia  $N$ .

$$B(N) = \left[ l_0^{\frac{2-m}{2}} + \frac{2-m}{2} C \pi^{\frac{m}{2}} M_k^m \left( \sum_{i=1}^L P_i U_i (\Delta\sigma_{i,ef})^m \right) N \right]^{\frac{2}{2-m}} - l_0$$

Na podstawie powyższej zależności wyznaczono przyrost średniej długości pęknięcia w funkcji liczby cykli obciążenia  $N$  od długości początkowej  $l_0 = 10\text{mm}$  do długości dopuszczalnej  $l_d = 25\text{mm}$ . Zmiana średniej długości pęknięcia w funkcji liczby cykli obciążenia została przedstawiona na rys.1.



Rys.1. Przyrost średniej długości pęknięcia w funkcji liczby cykli obciążenia

Bazując na obliczeniach wzrostu średniej długości pęknięcia zmęczeniowego  $B(N)$ , można stwierdzić, iż długość dopuszczalna pęknięcia  $l_d = 25mm$  zostanie osiągnięta po  $N_{l_d} = 124\ 110$  cyklach obciążenia. Aby wyznaczyć trwałość zmęczeniową badanego elementu w ujęciu probabilistycznym należy dodatkowo uwzględnić opisaną wzorem (24) wartości rozrzutu długości pęknięcia  $A(N)$ . Następnie dla wyznaczonej funkcji gęstości długości pęknięcia w funkcji liczby cykli obciążenia niezawodność elementu konstrukcji można wyznaczyć z zależności:

$$R(N)_{l_d} = \int_{-\infty}^{l_d} U(l, N_c) dl$$

Zaletą prezentowanej metody jest fakt, że uwzględnia ona zjawiska fizyczne towarzyszące występowaniu zmiennego widma obciążenia. Wartości występujących w tej metodzie stałych materiałowych oraz innego typu, które są niezbędne do obliczeń, należy wyznaczyć w badaniach doświadczalnych, natomiast część z nich (np. współczynniki  $C, m$  równania Parisa) można oszacować wykorzystując dane eksploatacyjne rozwoju pęknięć z zastosowaniem metody momentów lub funkcji wiarygodności.

## 6. Literatura

- [1] Kocańda S., Szala J. Podstawy obliczeń zmęczeniowych, PWN, Warszawa 1985.
- [2] Kocańda D., Tomaszek H., Jaształ M. Predicting fatigue crack growth and fatigue life under variable amplitude loading, Fatigue of Aircraft Structures - Monographic Series Issue 2010, Institute of Aviation Scientific Publications, Warsaw 2010: 37–51.
- [3] Rama Chandra Murthy A., Palani, Nagesh R. Iyer G.S., An improved Wheeler model for remaining life prediction of cracked plate panels under tensile-compressive overloading, SID, 1 No 3 (2005) 203-213.
- [4] Schijve J., The significance of fractography for investigations of fatigue crack growth under variable-amplitude loading, Fatigue Fract Eng Mater Struct 22 (1999): 87–99.
- [5] Schijve J., Skorupa M., Skorupa A., Machniewicz T., Gruszczyński P. Fatigue crack growth in aluminium alloy D16 under constant and variable amplitude loading, Int. J. Fatigue, 26 (2004): 1–15.
- [6] Tomaszek H., Żurek J., Jaształ M. Prognozowanie uszkodzeń zagrażających bezpieczeństwu lotów statków powietrznych, Wydawnictwo naukowe ITE, Radom 2008.