Roman KULCZYCKI-ŻYHAJŁO
Waldemar KOŁODZIEJCZYK

PRZYBLIŻONE ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA KONTAKTOWEGO WCISKANIA PARABOLOIDY W DWUWARSTWOWĄ PÓŁPRZESTRZEŃ PERIODYCZNĄ

APPROXIMATE SOLUTION OF THE CONTACT PROBLEM OF INDENTATION OF PARABOLOIDAL BODY INTO PERIODIC TWO-LAYERED HALF-SPACE

Rozwiązano osiowo-symetryczne zagadnienie kontaktowe dotyczące wciskania paraboloidy nieodkształcalnej w dwuwarstwową półprzestrzeń periodyczną. Rozpatrzono dwa modele półprzestrzeni warstwowej: jednorodną półprzestrzeń anizotropową oraz półprzestrzeń składającą się z określonej liczby warstw połączonych z jednorodną anizotropową półprzestrzenią. Ustalono parametry, przy których półprzestrzeń warstwową można zastąpić jednorodną półprzestrzenią anizotropową.

***Słowa kluczowe**: osiowo-symetryczne zagadnienie kontaktowe*

An axi-symmetric contact problem of the indentation of paraboloidal rigid body into a periodic two-layered half-space is solved. Two models of the laminated half-space are considered: a homogeneous anisotropic half-space and a half-space consisting of some quantity of layers bonded with the homogeneous anisotropic half-space. It is established the parameters for which the periodic two-layered half-space can be substituted with the homogeneous anisotropic half-space.

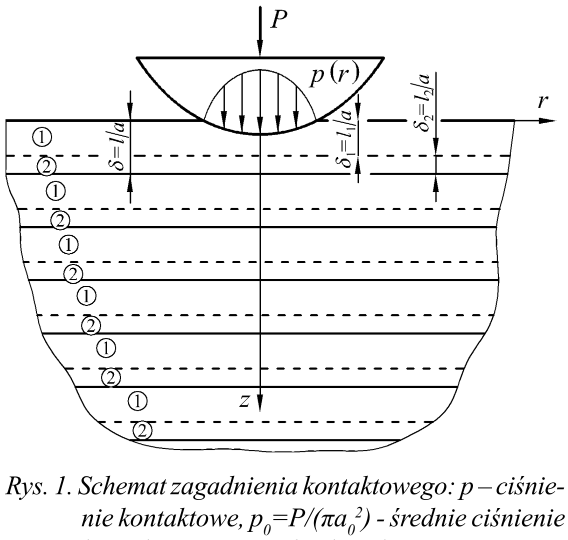
***Keywords**: axi-symmetric contact problem*

1. Sformułowanie zagadnienia

Zagadnienia teorii sprężystości dotyczące periodycznego ośrodka warstwowego często zastępuje się zagadnieniem dotyczącym jednorodnego ośrodka anizotropowego z właściwościami mechanicznymi obliczonymi na podstawie mechanicznych i geometrycznych (grubość) charakterystyk warstw [1-2]. Wnosi to określony błąd w rozwiązanie zagadnienia. Błąd ten w przypadku zagadnień kontaktowych zasadniczo zależy od stosunku grubości komórki periodyczności l i charakterystycznego liniowego wymiaru obszaru kontaktu a. W celu oszacowania popełnianego błędu rozwiążemy osiowo-symetryczne zagadnienie kontaktowe dotyczące wciskania nieodkształcalnej paraboloidy obrotowej w dwuwarstwową półprzestrzeń periodyczną (rys. 1). Rozpatrzymy dwa modele zagadnienia. Pierwszy model polega na zastąpieniu półprzestrzeni warstwowej jednorodną półprzestrzenią anizotropową [1-2]. Rozwiązanie zagadnienia otrzymuje się w postaci zamkniętej [3]:

$$p(r)/p_0 = 1.5\sqrt{1-r^2}\,,\ a_0^3 = 3PRA/8 \qquad (1)$$

Drugi model polega na rozpatrywaniu określonej



Rys. 1. Schemat zagadnienia kontaktowego: p – ciśnienie kontaktowe, $p_0=P/(\pi a_0^2)$ - średnie ciśnienie kontaktowe, P – siła docisku, α_0 – promień obszaru kontaktu w przypadku pierwszego podejścia, R – promień krzywizny w początkowym punkcie zetknięcia, A – parametr, który zależy od mechanicznych (E – moduł Younga i ν – współczynnik Poissona) i geometrycznych (grubość) charakterystyk warstw [4]

ilości warstw (n komórek periodyczności) połączonych z jednorodną półprzestrzenią anizotropową [1,2]. Zagadnienie sprowadza się do spełnienia:

- 4n równań różniczkowych teorii sprężystości dla poszczególnych warstw;
- 2 równań różniczkowych teorii sprężystości dla półprzestrzeni anizotropowej;
- 8n-4 warunków brzegowych idealnego kontaktu mechanicznego na płaszczyznach łączących warstwy;
- 4 warunków brzegowych idealnego kontaktu mechanicznego na płaszczyźnie łączącej warstwy i jednorodną półprzestrzeń anizotropową;
- 2 warunków brzegowych na powierzchni półprzestrzeni;
- 2 warunków opisujących zanikanie rozwiązania w nieskończoności;
- warunku równowagi stempla.

Należy zaznaczyć, że jeden z warunków brzegowych na powierzchni półprzestrzeni ma różną postać w obszarze i poza obszarem kontaktu. Opisują on odpowiednio warunek ciągłości przemieszczeń pionowych i brak obciążenia poza obszarem kontaktu. Drugi warunek brzegowy na powierzchni półprzestrzeni opisuje brak naprężeń stycznych. Ciśnienie kontaktowe poszukujemy w postaci [4]:

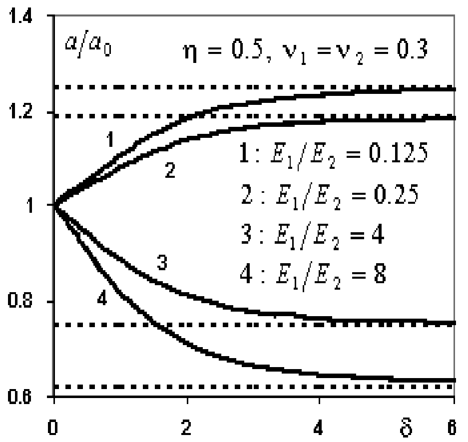
$$p(r)/p_0 = \left(\hat{p} + 1.25\left(3 - 2\hat{p}\right)r^2\right)\sqrt{1 - r^2} \qquad (2)$$

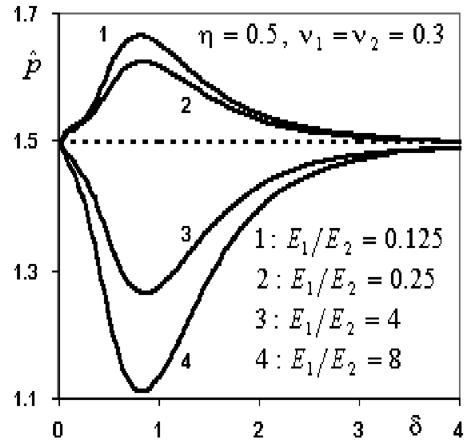
automatycznie spełniającej warunek równowagi stempla. Zagadnienie dotyczące obciążenia półprzestrzeni zadanym ciśnieniem kontaktowym rozwiązujemy za pomocą przekształcenia całkowego Hankela. Rozwiązanie otrzymujemy w postaci całkowej. Uzyskane wzory zawierają dwa nieznane parametry kontaktowe: a/α_0 i $\hat{p}$, które obliczamy na podstawie algorytmu opisanego w pracy [5].

Na rysunku 2 przedstawiono zależność pomiędzy parametrami kontaktowymi a/α_0 i $\hat{p}$ a bezwymiarową grubością komórki periodyczności δ i stosunkiem pomiędzy modułami Younga warstw E_1/E_2. W przypadku wartości $\delta < 0.1$ różnica pomiędzy rozwiązaniem (1) a rozwiązaniem (2) nie przekracza 2%. Największe odchylenie rozkładu ciśnienia kontaktowego od rozkładu typu Hertza obserwujemy przy $\delta \approx 0{,}8$. W przypadku, gdy na powierzchni półprzestrzeni leży bardziej sztywna warstwa, ciśnienie równomiernie rozkłada się w obszarze kontaktu. Gdy powierzchniowa warstwa jest mniej sztywna, otrzymujemy większą koncentrację ciśnienia w środku obszaru kontaktu w porównaniu z rozwiązaniem Hertza. Przy $\delta \to 0.8$ rozwiązanie zagadnienia dąży do rozwiązania dotyczącego półprzestrzeni izotropowej mającej właściwości mechaniczne górnej warstwy.

2. Podsumowanie

Rozwiązano osiowo-symetryczne zagadnienie kontaktowe dotyczące wciskania paraboloidy nieodkształcalnej w dwuwarstwową półprzestrzeń periodyczną. Na podstawie uzyskanego rozwiązania wnioskujemy, że w przypadku, gdy stosunek grubości komórki periodyczności do promienia obszaru kontaktu jest mały (około 0.1), zagadnienie dotyczące półprzestrzeni warstwowej może być zastąpione zagadnieniem dotyczącym jednorodnej półprzestrzeni anizotropowej.





Rys. 2. Zależność parametrów kontaktowych od bezwymiarowej grubości komórki periodyczności ($\eta = l_1/l_2 = \delta_1/\delta_2$)

3. Literatura

[1] Woźniak Cz.: *A nonstandard method of modelling of thermoelastic periodic composites*. Int. J. Engn. Sci., 25(1987)5, 483-499.

[2] Matysiak S.J.: *Thermal stresses in a periodic two-layered composite weakened by an interface crack*. Acta Mechanica, 78(1989), 95-108.

[3] Kulchytsky-Zhyhailo R., Matysiak S.: *On three-dimensional problems of multilayered periodic elastic composites*. J.Theor.Appl.Mech., 33(1995)4, 771-781.

[4] Кульчицкий-Жигайло Р., Колодзейчик В.: *Приближенное решение двумерной контактной задачи теории упругости о вдавливании параболического штампа в упругое слоистое полупространство*. Трение и износ, 25(2004)2, 125-134.

[5] Kulczycki R.: *Przestrzenne zagadnienia kontaktowe termosprężystości*. Rozprawy naukowe Nr 95. Wydawnictwo Politechniki Białostockiej, Białystok 2002 r.

****

Pracę wykonano w ramach projektu nr S/WM/1/03 realizowanego w Politechnice Białostockiej, finansowanego ze środków Komitetu Badań Naukowych.

****

Dr hab. Roman KULCZYCKI-ŻYHAJŁO
Mgr inż. Waldemar KOŁODZIEJCZYK
Wydział Mechaniczny
Politechnika Białostocka
e-mail: ksh@pb.bialystok.pl