

Miłosz P. WNUK

KWANTOWA TEORIA PROPAGACJI QUASI-STATYCZNYCH SZCZELIN W OŚRODKACH NIESPRĘŻYSTYCH QUANTUM THEORY OF QUASISTATIC FRACTURE PROPAGATING IN NONELASTIC SOLIDS

*W ciałach niesprężystych w każdym elementarnym procesie dekohezji, który prowadzi do pęknięcia w skali makroskopo-
wej, zachodzi interesujące "współzawodnictwo" między rozwojem uszkodzeń ("damage") oraz innych procesów
nieodwracalnej deformacji uwięzionych pęknięciem ("fracture"), spowodowanych plastycznością lub też lepkością
materiału. Próbę ilościowego opisu takich zjawisk, poprzedzających katastrofalny rozwój szczeliny, przedstawia
tutaj teoria kwantowa, oparta na kryterium Wnuka, tak zwanym kryterium "rozwarcia końcowego", zaproponowanym
w 1972 roku, zob. Wnuk (1972, 1974, 1977). Należy podkreślić, że zjawiska, o których tu mowa, nie mogą być adekwat-
nie reprezentowane przez kontinualną mechanikę zniszczenia, liniową czy też nieliniową.*

*Nasza teoria zakłada dwu-fazową strukturę strefy nieliniowej poprzedzającej front szczeliny. Model ten dotyczy zarówno
szczelin stacjonarnych jak też poruszających się w zakresie poniżej progu naprężenia krytycznego (propagacja podkry-
tyczna). Najważniejszym elementem takiego zmodyfikowanego modelu kohezijnego szczeliny jest przyjęcie istnienia cząstki
Neubera w bezpośrednim sąsiedztwie wierzchołka szczeliny. Jest to tak zwana "strefa delta", w odróżnieniu od "nie-
liniowej strefy R". Wewnątrz strefy delta zachodzą intensywne procesy odkształcenia, których nie sposób opisać przy
pomocy mechaniki ciał ciągłych. Dla ciał ciągliwych "delta" jest bardzo mała w porównaniu z długością strefy kohezyj-
nej, natomiast dla ciał kruchych obydwa parametry skali zlewają się w jeden obszar; którego rozmiar zmierza do zera.*

*W literaturze anglosaskiej strefę delta nazywa się "process zone". Nazwa taka implikuje, że ostateczna faza intensyw-
nej deformacji poprzedzającej zjawisko zniszczenia zachodzi właśnie w tej strefie. Ponieważ cząsteczka Neubera ma
skończone wymiary, proces zniszczenia ma charakter kwantowy. Także akumulacja nieodwracalnego odkształcenia,
czas niezbędny dla doprowadzenia stanu odkształceń do stanu nasycenia (krytycznego) wewnątrz cząstki Neubera oraz
sama propagacja szczeliny mają charakter kwantowy.*

*W granicy, dla ciał idealnie sprężystych, obowiązuje "zasada odpowiedniości", znana w mechanice kwantowej, kiedy
to opis kwantowy staje się równoważny opisowi kontinualnemu. Wynikiem takiego przejścia granicznego jest powrót
do klasycznej teorii Griffitha. Teoria Griffitha jest zatem szczególnym przypadkiem opisanego tu modelu procesów
dekohezji, obserwowanych w ciałach niesprężystych.*

Słowa kluczowe: pękanie, sprężysto-plastyczne i lepko-sprężyste odkształcenia, szczelina quasi-statyczna, mo-
del kwantowy, uszkodzenia, zniszczenie, rozerwanie, nano-mechanika, mesomechanika, inżyn-
ieria materiałowa

*Higher demands on reliability of high performance structures require a better understanding of damage and failure
processes that evolve in the nonelastic material prior to the critical state leading to a catastrophic fracture. To account
for these time-dependent pre-fracture stages of damage and strain evolution, such as a slow stable, or subcritical,
crack growth, occurring in dissipative materials, a quantum model is proposed.*

*The essential assumption underlying the theory concerns the existence of the Neuber particle, the so-called "process
zone", adjacent to the crack tip. This particle is of size Δ , and it is embedded within a larger cohesive zone, R . The near-
tip stress field is modeled by a cohesive zone concept modified by the structured nature of the cohesive zone. A two-phase
zone is assumed to be associated with any crack, whether it is stationary one or a moving one. Both plasticity and
viscoelasticity are incorporated in the material representation. It is shown how the variations in the ratio R/Δ lead to
a transition from ductile to brittle fracture. An equation of motion for a slowly moving crack, which remains in equilibrium
with the applied load, is established through application of the "final stretch" criterion proposed by Wnuk in 1972, cf.
Wnuk (1972, 1974, 1977).*

*Growth of a quasistatic crack is viewed as a sequence of local instability states, while the transition from stable to unstable crack
extension is considered to represent a global instability case. Equations predicting occurrence of such transition are derived from
the quantum model. In the limit case, when the quantum variables approach zero, one recovers the classic case of the Griffith
theory.*

Keywords: Fracture, elasto-plastic and viscoelastic strains, quantum modeling, time-dependent processes, qu-
asistatic crack, damage, failure, rupture, nanomechanics, mesomechanics, materials engineering

1. Wprowadzenie

W ciałach idealnie sprężystych, lub też sprężysto-plastycznych gdy efekty plastyczności są małe, naprężenie krytyczne, przy którym następuje inicjacja pęknięcia, można wyznaczyć z kilku równoważnych sobie kryteriów wywodzących się z mechaniki kontynuualnej ciał stałych. Mamy tu na myśli kryteria oparte o takie podstawowe zasady mechaniki jak balans energetyczny (globalne kryterium Griffitha), krytyczny poziom współczynnika intensywności naprężenia (lokalne kryterium Orowana-Irwina), zastosowanie całki Rice’a, lub kryterium potencjału pola, które Irwin nazwał “crack driving force”, lub też liczne inne kryteria używane w zakresie nieliniowym (jak np. kryterium CTOD Wellsa dla płyt spawanych), lecz mające tę własność, że wszystkie sprowadzają się – w przypadku granicznym – do klasycznego rezultatu Griffitha oraz innych istotnych równań liniowej mechaniki zniszczenia (LEFM).

Kryteria te zawodzą dla ciał niesprężystych, lub też – ogólniej mówiąc – dla ciał, w których uwzględnia się mikrostrukturę na kilku poziomach zdolności rozdzielczej instrumentów użytych do obserwacji zjawisk odkształceń poprzedzających makroskopową propagację pęknięcia. Mowa tu o zakresach “mesomechaniki” rozważanych w nowoczesnej teorii zniszczenia na różnych poziomach skali. I tak na przykład, klasyczna teoria szczelin, tzw. LEFM (linear elastic fracture mechanics) nie jest w stanie opisać zależnego od czasu zjawiska powolnego ruchu szczeliny w zakresie naprężeń **poniżej** naprężenia krytycznego. Jest to faza tak zwanego “pod-krytycznego” ruchu szczeliny, bardzo istotna w rozumieniu istoty odporności na pęknięcie oraz działaniu mechanizmów zapobiegającym pęknięciom w materiałach niesprężystych, zdolnych do dyssypacji energii. Okazuje się, że żadne z kryteriów stosowanych w standardowym modelu pęknięć, wyprowadzonym z kontynuualnej teorii LEFM, nie jest w stanie nie tylko opisać, ale nawet i przewidzieć istnienia fazy podkrytycznej propagacji szczeliny. To interesujące zjawisko można przyrównać do fazy “przemieszczeń wstępnych”, znanej fizykom studiującym nieliniowe aspekty procesu tarcia. I w jednym i drugim przypadku, obserwowane zjawisko, zachodzi poniżej określonego progu, czy to przyłożonego obciążenia, czy też siły pokonywującej opór tarcia. Można by zatem powiedzieć, że zjawisko odbywa się wbrew prawom klasycznej fizyki.

2. Teoria kwantowa

Dla zmodyfikowanego modelu Dugdale’a w zakresie plastyczności bliskiego zasięgu przemieszczenia normalne do płaszczyzny szczeliny dają się wyrazić, cf. Rice (1968) oraz Wnuk (1974) wzorem

$$u_y(x_l, R) = \frac{4\sigma_0}{\pi E_I} \left[\sqrt{R(R-x_l)} - \frac{x_l}{2} \ln \frac{\sqrt{R} + \sqrt{R-x_l}}{\sqrt{R} - \sqrt{R-x_l}} \right] \quad (2.1)$$

lub też

$$u_y(\lambda) = \frac{4\sigma_0 R}{\pi E_I} \left[\sqrt{1-\lambda} - \frac{\lambda}{2} \ln \frac{1+\sqrt{1-\lambda}}{1-\sqrt{1-\lambda}} \right] = \frac{4\sigma_0 R}{\pi E_I} \Lambda_p(\lambda) \quad (2.2)$$

$$\lambda = \frac{x_l}{R}, E_I = \begin{cases} E & p.s.n \\ \frac{E}{(1-\nu^2)} & p.s.o \end{cases}$$

Zauważmy, że dla szczeliny stacjonarnej wielkość R jest stała, określona przez współczynnik intensywności naprężeń K_{Ic} oraz granice plastyczności σ_p . Natomiast dla szczeliny poruszającej się, odle-

głość dowolnego ustalonego punktu wewnątrz strefy R zmienia się wraz z czasem, zatem odległość tę można traktować jako czasopodobną zmienna. Tak więc, dla ruchu quasi-statycznego wielkość R , która zależy teraz od czasu, można uważać za pewną, *a priori* nieznaną funkcję x_l . Funkcje przemieszczeń $u_y(x_l, R)$, podaną wzorem (2.1), należy zatem przepisać w postaci

$$u_y[x_l, R(x_l)] = \frac{4\sigma_0}{\pi E_I} \left[\sqrt{R(x_l)(R(x_l) - x_l)} - \frac{x_l}{2} \ln \frac{\sqrt{R(x_l)} + \sqrt{R(x_l) - x_l}}{\sqrt{R(x_l)} - \sqrt{R(x_l) - x_l}} \right] \quad (2.3)$$

W teorii kwantowej ważną rolę grają dwie stałe materiałowe, Δ oraz δ . Pierwsza z nich reprezentuje kwant przyrostu długości szczeliny, druga zaś jest podwojonym przyrostem końcowym przemieszczenia prostopadłego do płaszczyzny szczeliny, który zachodzi w punkcie obserwacyjnym umieszczonym na zewnętrznym brzegu cząstki Neubera, w czasie (również skwantowanym) $\delta t = \Delta/(dl/dt)$, gdzie l oznacza bieżącą długość szczeliny. Teoria ta postuluje, że skokowy przyrost długości szczeliny, Δ , może nastąpić wówczas, gdy spełniony jest warunek Wnuka, tak zwanego „przemieszczenia końcowego” w punkcie kontrolnym P , zob. Rys. 1, mianowicie

$$\delta_p u_y = u_y[0, R(0)] - u_y[\Delta, R(\Delta)] = \frac{\delta}{2} \quad (2.4)$$

Zauważmy, że na Rys. 1 przedstawione są dwa sąsiednie stany “1” i “2” – i dla tych właśnie stanów oblicza się czas “ $t-\delta t$ ” oraz “ t ”, a także wszystkie pozostałe wielkości. Warto zauważyć, że współrzędna punktu obserwacyjnego P dla stanu 1 wynosi $x_l = \Delta$, natomiast dla stanu 2, współrzędna ta wynosi zero (front szczeliny znajduje się obecnie w punkcie P). Łącząc równanie (2.3) z kryterium (2.4), które jeszcze raz przepiszemy w zwartej postaci

$$\delta_p u_y = u_2(P) - u_1(P) = \hat{u} \quad (2.5)$$

Ponieważ δ oznacza przyrost całkowitego rozwarcia wierzchołkowego, mamy prosta zależność między liczbami kwantowymi \hat{u} oraz δ , mianowicie $2\hat{u} = \delta$.

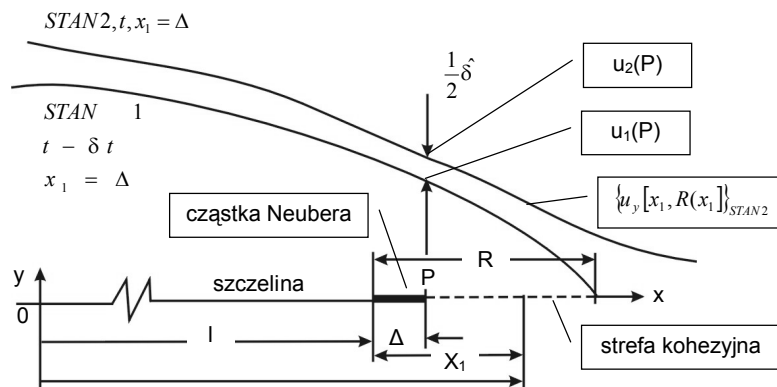
Wyprowadzimy obecnie równanie różniczkowe ruchu szczeliny quasi-statycznej. Równanie to definiuje funkcję $R = R(l)$, gdzie “ l ” oznacza bieżącą długość szczeliny. Zaczniemy od funkcji czasu, $R = R(t)$, którą rozwiniemy w szereg Taylora w następujący sposób:

$$R(t) = R(t - \delta t) + \frac{dR}{dt} \delta t \quad (2.6)$$

Jeśli w miejsce kwantu czasu δt podstawimy $\Delta/(dl/dt)^t$, to

$$R(t) = R(t - \delta t) + \frac{dR}{dl} \Delta \quad (2.7)$$

Zastępując czas przez czasopodobną zmienną x_l , oraz zauważając, że $dx_l = -dl$, podstawiamy $-dR/dx_l$ w miejsce dR/dl , aby otrzymać wyrażenie zależne od x_l



Rys. 1. Kwant propagacji szczeliny, jako różnica między położeniem wierzchołka szczeliny w stanie 2 ($x=1+d, x_1=0$) oraz w stanie 1 ($x=1, x_1=D$). Rysunek ilustruje również kwant przyrostu przemieszczenia $(1/2)\hat{\delta}$ w punkcie obserwacyjnym p

$$[R(x_1)]_{x_1=0} = [R(x_1)]_{x_1=\Delta} - \frac{dR(x_1)}{dx_1} \Delta \quad (2.8)$$

lub też, równoważne mu wyrażenie

$$R(0) = R(\Delta) + \frac{dR}{dl} \Delta \quad (2.9)$$

Zamiana $-dx_1$ na dl wynika z prostej równości, $l + x_1 = x(P) = \text{const}$. Obliczymy teraz wielkości występujące w kwantowym kryterium ruchu (2.4)

$$u_2(P) = u_y[0, R(0)] = \frac{4\sigma_0}{\pi E_1} R(0) = \frac{4\sigma_0}{\pi E_1} \left[R(\Delta) + \frac{dR}{dl} \Delta \right] \quad (2.10)$$

$$u_1(P) = u_y[\Delta, R(\Delta)] = \frac{4\sigma_0}{\pi E_1} \left[\sqrt{R(\Delta)(R(\Delta) - \Delta)} - \frac{\Delta}{2} \ln \frac{\sqrt{R(\Delta)} + \sqrt{R(\Delta) - \Delta}}{\sqrt{R(\Delta)} - \sqrt{R(\Delta) - \Delta}} \right]$$

Odejmując te dwa wyrażenia od siebie i podstawiając do kryterium ruchu (2.4), otrzymujemy

$$R + \Delta \frac{dR}{dl} - \sqrt{R(R-\Delta)} + \frac{\Delta}{2} \ln \frac{\sqrt{R} + \sqrt{R-\Delta}}{\sqrt{R} - \sqrt{R-\Delta}} = \frac{\hat{\delta}}{2} \left(\frac{\pi E_1}{4\sigma_0} \right) \quad (2.11a)$$

Po uporządkowaniu równania, dostajemy

$$\frac{dR}{dl} = \frac{\hat{\delta}}{\Delta} \left(\frac{\pi E_1}{8\sigma_0} \right) - \frac{R}{\Delta} + \sqrt{\frac{R}{\Delta} \left(\frac{R}{\Delta} - 1 \right)} - \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{\Delta}{R}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\Delta}{R}}} \quad (2.11b)$$

lub też – w postaci bezwymiarowej

$$\frac{dY}{dX} = M - \rho Y + \sqrt{\rho Y (\rho Y - 1)} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{\rho Y} + \sqrt{\rho Y - 1}}{\sqrt{\rho Y} - \sqrt{\rho Y - 1}} \quad (2.11c)$$

Stałą $M = \left(\frac{\hat{\delta}}{\Delta} \right) \left(\frac{\pi E_1}{8\sigma_0} \right)$ będziemy nazywać modulem dekohezji.

Oczywiście, symbol y oznacza R/Δ . Zastąpimy tą zmienną iloczy-

nem wskaźnika ciągliwości $\rho = \frac{R_{ini}}{\Delta}$ oraz zmiennej $Y = \frac{R}{R_{ini}}$,

mianowicie, $y = \rho Y$. Warunkiem początkowym dla równania (2.11a)

jest $R = R_{ini}$ dla $l = l_0$, lub też $Y = 1$ dla $X = X_0$, gdzie $X = \frac{l}{R_{ini}}$.

Równanie (2.11c) jest nieliniowym równaniem różniczkowym pierwszego rzędu, które łatwo można scałkować numerycznie (zauważmy, że zmienne są już rozdzielone).

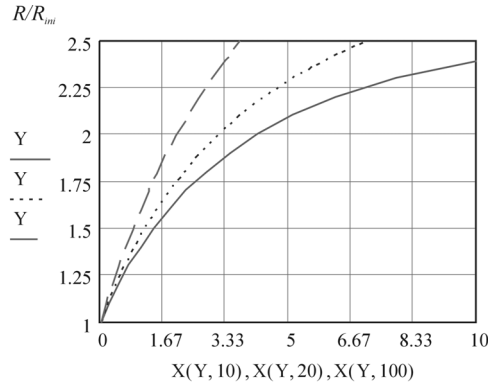
Numeryczne całkowanie równania (2.11c) prowadzi do tak zwanej "uniwersalnej krzywej materiałowej odporności, R ", lub po prostu – krzywej R . Rodzinę takich krzywych, otrzymanych dla różnych wartości parametru ciągliwości ρ , pokazano na Rys. 2. Łatwo zauważyć, że dla bardziej ciągliwego materiału otrzymujemy bardziej stroma krzywa R . Efekt ten prowadzi do przedłużonej fazy podkrytycznego ruchu szczeliny przy rosnącej ciągliwości. I na odwrót, dla krzywych R bliższych linii poziomej, $Y = 1$, zjawisko wzrostu odporności na pęknięcie w fazie poprzedzającej punkt krytyczny zanika. Wreszcie, dla ciała idealnie kruche, obecna teoria kwantowa ruchu szczeliny redukuje się do teorii Griffitha. Tutaj istnieje tylko jeden punkt krytyczny, $X = 0, Y = 1$, a nie zbiór stanów krytycznych, jak to ma miejsce dla szczeliny quasi-statycznej. Wyjaśnić też należy, że ciąg kolejnych równowagowych szczelin, o coraz to większej długości l , interpretować trzeba jako zbiór stanów **lokalnej** niestateczności, natomiast stan krytyczny osiągnięty w momencie przejścia do pęknięcia katastrofalnego, utożsamić trzeba z niestatecznością **globalną**.

Tak więc, odcinki krzywych pokazanych na Rys. 2, począwszy od inicjacji do punktów 1, 2 oraz 3, przedstawiają kontinua stanów lokalnej niestateczności, natomiast punkty zaznaczone kółeczkami na trzech krzywych reprezentują "końcową" lub też globalną utratę stateczności dla rozważanej konstrukcji.

Punkt przejścia od propagacji równowagowej do dynamicznej określony jest dwoma równaniami

$$\left. \begin{aligned} R_{MAT} &= R_{APPL} \\ \frac{dR_{MAT}}{dl} &= \frac{\partial R_{APPL}}{\partial l} \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Z lewej strony tych równań występuje charakterystyka mate-



$$\Delta X = l / R_{mi} - l_0 / R_{mi}$$

Rys. 2. Krzywe "R" reprezentujące odporność materiału w początkowej fazie pękania, wynikające z równania różniczkowego (2.17) dla trzech różnych wartości parametru ciągłości ρ .

riału, R_{MAT} określona równaniem (2.11a). Po prawej stronie, natomiast, należy podstawić odpowiednie wyrażenie na R_{APPL} , zawierające siłę zewnętrzną oraz bieżącą długość szczeliny, podczas gdy pochodna cząstkowa powinna być wykonana przy pewnych ustalonych warunkach procesu obciążenia, jakie narzuca eksperyment. Zazwyczaj rozważa się możliwość obciążenia kontrolowanego siłą (wówczas $U \rightarrow \sigma$ lub Q), lub obciążenia dostarczonego przez tzw. "sztywną" maszynę, wówczas kontrolowane jest przemieszczenie, i wtedy $U \rightarrow u$.

Dla najprostszego przypadku szczeliny o konfiguracji Griffitha, kiedy szerokość płyty znacznie przewyższa rozmiar szczeliny, oraz naprężenie σ przyłożone jest prostopadłe do płaszczyzny szczeliny, mamy następujące związki

$$R_{APPL} = \frac{\pi K_I^2}{8 \sigma_0} = \frac{\pi \sigma^2 (\pi l)}{8 \sigma_0^2} = \frac{1}{2} l Q^2$$

$$Q = \frac{\pi \sigma}{2 \sigma_0} \quad (2.13)$$

Dla prostoty zapisu opuścimy wskaźniki "APPL" i "MAT" (obydwie wielkości powinny być sobie równe w punkcie globalnej niestateczności), i skorzystamy z następujących elementarnych równań:

$$R = \frac{1}{2} l Q^2, \left. \frac{\partial R}{\partial l} \right|_{\sigma=const} = \frac{1}{2} Q^2 = \frac{R}{l} \quad (2.14)$$

Zauważmy, że pochodna cząstkowa została obliczona przy założeniu eksperymentu, w którym naprężenie jest kontrolowane przez obserwatora. Utożsamiając w punkcie krytycznym R_{MAT} oraz R_{APPL} mamy zatem warunek zaistnienia globalnej niestateczności

$$\left. \frac{dR}{dl} \right)_{kryt} = \left. \frac{R}{l} \right)_{kryt} \quad (2.15)$$

Używając równania (2.11a) do przedstawienia lewej strony powyższego równania, otrzymujemy

$$M - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log \left(\frac{4R}{\Delta} \right) = \frac{R}{l} \quad (2.16)$$

Tutaj funkcja $R = R(l)$, lub też funkcja odwrotna $l = l(R)$, jest zdefiniowana równaniem różniczkowym

$$\frac{dR}{dl} = M - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log \left(\frac{4R}{\Delta} \right) \quad (2.17)$$

bo do takiej postaci redukuje się równanie (2.11a), gdy założymy najbardziej interesujący nas przypadek, kiedy to własność ciągłości sprawia, że rozmiar cząstki Neubera Δ jest znacznie mniejszy od długości strefy kohezji, R . Identyczne równanie uniwersalnej krzywej R , wyprowadzone w niezależny sposób, podano w pracach Rice i Sorensen (1978) oraz Rice et al. (1980).

Schemat numerycznego obliczania krytycznej długości jest następujący. Rozdzielając zmienne w równaniu (2.17), dostajemy funkcję odwrotną

$$l(R, R_{ini}) = \int_{R_{ini}}^R \frac{dR'}{M - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4R'}{\Delta} \right)} + l_0 \quad (2.18)$$

a następnie szukamy pierwiastka równania (2.16), które przepiszemy w następującej formie

$$\left[M - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4R}{\Delta} \right) \right] \cdot \left\{ \int_{R_{ini}}^R \frac{dR'}{M - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4R'}{\Delta} \right)} + l_0 \right\} - R = 0 \quad (2.19)$$

Jeśli wprowadzimy bezwymiarowe zmienne

$$y = \frac{R}{\Delta} = \rho \frac{R}{R_{ini}} = \rho Y, Y = \frac{R}{R_{ini}} \quad (2.20)$$

$$X = \frac{l_0}{R_{ini}} + \frac{\Delta l}{R_{ini}} = X_0 + \Delta X$$

to równanie (2.19) definiujące stan krytyczny równowazny globalnej niestateczności przepiszemy w postaci

$$\left[M - \frac{l}{2} - \frac{l}{2} \ln(4\rho Y) \right] \cdot \left\{ \int_1^Y \frac{dY'}{M - \frac{l}{2} - \frac{l}{2} \ln(4\rho Y')} + X_0 \right\} - Y = 0 \quad (2.21)$$

Przyjmując moduł dekohezji M o 20% większy niż minimalny moduł M_{min} , poniżej którego zjawisko podkrytycznej propagacji szczeliny nie występuje

$$M_{min} = \frac{l}{2} + \frac{l}{2} \ln(4\rho) \quad (2.22)$$

oraz kładąc $X_0 = 10$, otrzymujemy następujące rozwiązania równania (2.21)

$$\begin{aligned} - \text{dla } \rho = 10, & \quad Y_{kryt} = 1.919 \quad X_{kryt} = 13.563 \\ - \text{dla } \rho = 20, & \quad Y_{kryt} = 2.152 \quad X_{kryt} = 4.039 \\ - \text{dla } \rho = 100, & \quad Y_{kryt} = 2.8 \quad X_{kryt} = 15.194 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Dane zebrane w ostatniej kolumnie zostały obliczone z równania

$$X_{kryt} = \int_1^{Y_{kryt}} \frac{dY'}{M - \frac{l}{2} - \frac{l}{2} \ln(4\rho Y')} + X_0 \quad (2.24)$$

Alternatywne obliczenia, prowadzące do tych samych rezultatów, można wykonać, szukając maksimum na tzw. "krzywej Q ", czyli funkcji zależności bezwymiarowego obciążenia zewnętrznego Q od długości szczeliny l lub też X . Gdy funkcja $Y = Y(X)$ została już obliczona przez numeryczne całkowanie równania (2.16), poddanego warunkowi początkowemu $Y = 1$ dla $X = X_0$, wielkość Q można łatwo obliczyć. Z równania (2.13) wynika

$$Q = \left(\frac{2Y}{X} \right)^2 \quad (2.25)$$

Dla rozpatrywanych trzech przypadków, $\rho = 10, 20$ oraz 100 , trzy krzywe Q zostały zilustrowane na Rys.3. Punkty globalnej niestateczności pokrywają się przy σ -kontrolowanym systemie obciążenia z maksimami na krzywych Q . Z Rys. 3 widać, że położenie tych maksimów pokrywa się dokładnie z danymi zebranymi w równaniach (2.23). Wyniki tych obliczeń przedstawimy następująco (przypomnijmy, że $Q_{ini} = .4 \quad 472$)

$$\begin{aligned} - \text{dla } \rho = 10 & \quad Q_{kryt} = 0.532 \quad \Delta Q = 19.0\% \\ - \text{dla } \rho = 20 & \quad Q_{kryt} = 0.554 \quad \Delta Q = 23.9\% \\ - \text{dla } \rho = 100 & \quad Q_{kryt} = 0.607 \quad \Delta Q = 35.7\% \end{aligned} \quad (2.26)$$

Ostatnia kolumna w (2.26) podaje procentowy przyrost obciążenia w stosunku do obciążenia, przy którym nastąpił powolny wzrost szczeliny. Widoczne jest, że liczby wzrastają dla rosnącej ciągliwości materiału. Zauważmy, że dla ciała bliskiego idealnie kruchemu $\rho \rightarrow 1$, oraz $Q_{kryt} \rightarrow Q_{ini} = (\pi/2)(\sigma_G/\sigma_0)$, gdzie symbolem σ_G oznaczono klasyczne naprężenie Griffitha

$$\sigma_G = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi l_0}} \quad (2.27)$$

Używając zapisu bezwymiarowego, równanie (2.7) daje się

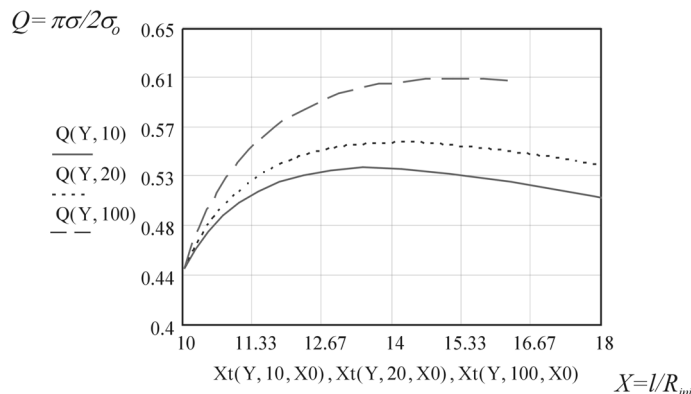
przedstawić jako $Q_G = \sqrt{\frac{2}{X_0}}$. Stany bliskie temu granicznemu przypadkowi omówimy w części czwartej.

3. Maksimum obciążenia jako punkt niestateczności globalnej. Wskaźnik niestateczności

Wyprowadzimy obecnie równanie różniczkowe definiujące zależność bezwymiarowego parametru obciążenia Q od bezwymiarowej bieżącej długości szczeliny X . Przypomnijmy równanie (2.14), które podaje związek między zmiennymi Y, X oraz Q , to znaczy między miarą odporności na pęknięcie, długością szczeliny oraz obciążeniem. Obydwie strony równania

$$Q^2 = \frac{2Y}{X} \quad (3.1)$$

różniczkujemy podług X , pamiętając, że dla quasi-statycznej szczeliny zarówno Y jak i Q są funkcjami X . Mamy więc



Rys. 3. Krzywe "Q" reprezentujące bezwymiarowy parametr obciążenia jako funkcje bieżącej długości szczeliny quasi-statycznej, otrzymane z równania różniczkowego (3.5) dla trzech różnych wartości ciągliwości i przy założeniu, że początkowa długość szczeliny $l_0 = 10R_{ini}$.

$$2Q \frac{dQ}{dX} = \frac{2XdY}{dX} - 2Y \quad (3.2)$$

Stąd, otrzymujemy równanie różniczkowe

$$\frac{dQ}{dX} = \frac{dY}{dX} - \frac{Y}{X} \quad (3.3)$$

Następnym krokiem jest wyeliminowanie pochodnej dY/dX oraz samej funkcji Y . Jeśli podstawimy prawą stronę równania (2.17) w miejsce dY/dX , to znaczy

$$\frac{dY}{dX} = F_D(Y, \rho) = M - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(4\rho Y) \quad (3.4)$$

oraz zastąpimy Y przez $(1/2)XQ^2$, to równanie (3.3) możemy przepisać w postaci

$$\frac{dQ}{dX} = \frac{M - \frac{1}{2} \ln(2eXQ^2) - \frac{1}{2} Q^2}{QX} \quad (3.5)$$

Przypomnijmy, że moduł dekohezji M jest funkcją wskaźnika ciągliwości

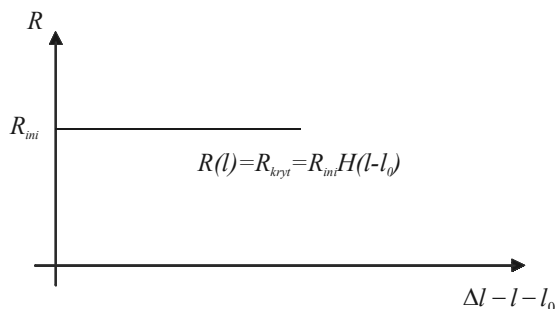
$$M(\rho) = 1.2 M_{min}(\rho) = 1.2(0.5 \ln(4e\rho)) \quad (3.6)$$

Spodziewamy się zatem, że wynik całkowania równania (3.6) będzie zależał od wskaźnika ρ , a także od długości początkowej szczeliny, X_0 . Ta zależność jest określona poprzez warunek początkowy, jaki dyktuje równanie (3.1), mianowicie

$$X = X_0, \quad Q = Q_{ini} = \sqrt{\frac{2}{X_0}} \quad (3.7)$$

Dla $X_0 = 10$ otrzymujemy $Q_{ini} = 0.4472$, a następnie całkując równanie (3.5) dla trzech różnych wartości ρ otrzymujemy trzy krzywe pokazane na Rys. 3. Są to tak zwane krzywe Q . Każda z nich osiąga maksimum w innym punkcie, zależnie od przyjętej wartości X_0 oraz ρ . Interpretacja fizyczna zjawiska tu opisywanego jest następująca.

Zamiast funkcji skokowej, pokazanej na Rys. 4, która reprezentuje zależność obciążenia od długości szczeliny w klasycznej teorii Griffitha, teoria kwantowa szczeliny quasi-statycznej przewiduje stopniowy wzrost obciążenia Q od momentu inicjacji ruchu



Rys. 4. Krzywa R dla ciała idealnie kruchego, przedstawiona funkcja skokowa Heaviside'a $H=H(l-l_0)$

($X = X_0, Q = Q_{ini}$) aż do punktu globalnej niestateczności, kiedy to cała konstrukcja, lub też część konstrukcji, ulega zniszczeniu. Przy procesie obciążenia kontrolowanym poprzez przyłożoną siłę, punkt globalnej niestateczności pokrywa się z maksimum na krzywej Q . Jak łatwo stwierdzić, uważnie obserwując Rys. 3, położenie trzech maksimumów dla pokazanych tu krzywych Q pokrywa się z danymi zebranymi w równaniach (2.23) oraz (2.26). Tak jest, oczywiście, tylko w przypadku obciążenia, przy którym kontroli podlega zewnętrzna siła. Jeśliby rozpatrzyć możliwość sterowania procesem obciążenia poprzez wywierane przemieszczenie, to punkt krytyczny niestateczności globalnej mieściłby się poza maksimum na krzywej Q . Zjawiska niestateczności tego typu zostały opisane w pracach Wnuk (1990), Wnuk i Omidvar (1997) oraz Wnuk, Omidvar i Choroszynski (1998), a także w pracy sponsorowanej przez NASA, poświęconej szczelinie propagującej się wzdłuż połączenia adhezyjnego, zob. Wnuk et al. (2000)

W zakresie obciążeń $Q_{ini} < Q < Q_{max}$ obserwujemy interesujące zjawisko, kiedy to przyłożone obciążenie pozostaje w równowadze z rosnącą szczeliną. Funkcja reprezentująca taką zależność wzrasta monotonicznie, nie powodując katastrofalnej propagacji szczeliny. Historia potwierdza takie zjawiska. W muzeum "Smithsonian Institution" w Waszyngtonie znajduje się część kadłuba frachtowca typu "Liberty" (budowanego w Stanach w wielkim pośpiechu podczas drugiej wojny światowej), na którym widać ślady powolnej propagacji szczeliny oraz znaki zrobione kreda przez bosmana na pokładzie statku. Przy każdym znaku identyfikującym aktualne położenie frontu szczeliny bosman dopisał datę. Jest to więc niezbity dowód na istnienie zależnego od czasu powolnego rozwoju szczeliny, potwierdzony również wieloma doświadczeniami, wykonywanymi w laboratorium. Niekiedy upodabnia się ów proces do zjawiska zmęczenia "statycznego", występującego bez użycia obciążeń cyklicznych. Efekt końcowy jest taki sam: po fazie powolnego wzrostu szczeliny następuje gwałtowna przemiana w postaci katastrofalnej, nie dającej się zatrzymać, propagacji pęknięcia. Wracając do naszego historycznego przykładu szczeliny zauważonej na pokładzie statku "Liberty", to statek ten dopłynął do portu zanim szczelina osiągnęła rozmiar krytyczny. Wiele innych statków tego typu zatonięło na morzu, lub też w porcie, niekiedy łamiąc się w poprzek całego kadłuba.

Na zakończenie wyjaśnimy koncept "wskaźnika niestateczności". Jeśli licznik prawej strony równania (3.5) wyrazić jako funkcje X , to otrzymamy

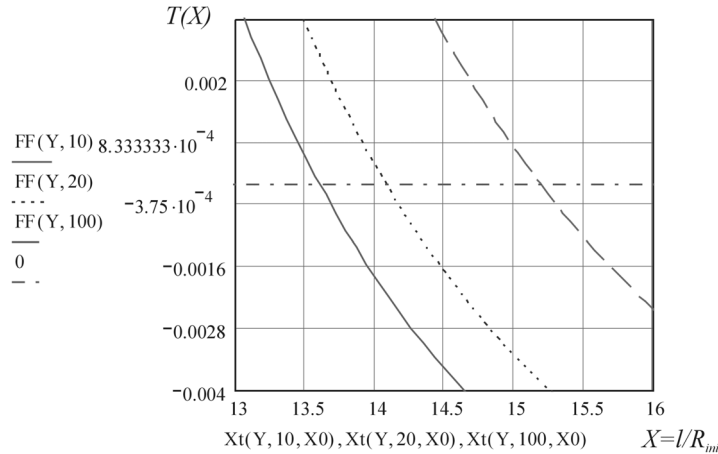
$$S(X) = M - \frac{1}{2} \ln(2eXQ^2) - \frac{1}{2} Q^2 \quad (3.8)$$

Gdzie funkcja $Q = Q(X)$ musi być już znana. Gdy wyrażenie $S(X)$ osiąga zero, ustalone zostaje położenie maksimum na krzywej Q , czyli punkt globalnej niestateczności. Alternatywnie, można też użyć licznika prawej strony równania (3.3), mianowicie

$$T(X) = \frac{dY}{dX} - \frac{Y}{X} = F_D(Y, \rho) - \frac{Y}{X} \quad (3.9)$$

Gdzie dY/dX jest zdefiniowane równaniem (3.4), natomiast funkcja $Y = Y(X)$ jest znana nam już krzywa R . Dla szczeliny stabilnej wielkość T jest dodatnia, dla niestabilnej T jest ujemne. Przejście funkcji T przez zero określa położenie punktu krytycznego w sensie globalnym (cała konstrukcja ulega zniszczeniu).

Obydwie funkcje, $S(X)$ oraz $T(X)$, mogą być użyte do precyzyjnego wyznaczenia stanu towarzyszącego globalnej niestatecz-



Rys. 5. Wskaźniki niestateczności, $S(X)$ lub $T(X)$, zdefiniowane równaniami (3.8) i (3.9), pokazane jako funkcje bieżącej długości szczeliny quasi-statycznej, $X = l/R_{min}$. Wyniki analizy zmienności tych funkcji zebrano wwniach (2.23) oraz (2.26)

ności, zob. Rys. 5. Proponujemy nazywać te funkcje wskaźnikami niestateczności. Są one bardzo pożytecznym narzędziem przy projektowaniu konstrukcji z uwzględnieniem niezawodności.

4. Przypadek pęknięcia kruchego

Dla opisanego pęknięcia ciał kruchych zakładamy, że obydwie strefy w kwantowym kohezynym modelu szczeliny zlewają się praktycznie w jeden obszar końcowy. Wówczas strefa Δ oraz wymiar R stają się bliskie sobie. A zatem prawą stronę równania (2.11a) należy teraz rozwinąć na uogólniony szereg potęgowy dla $R/\Delta \rightarrow 1$. Interesująca będzie także analiza danych oparta o model Knaussa, w którym modelując kruchość materiału przyjęto liniowy (raczej niż stały jak u Dugdale'a) rozkład naprężeń w strefie kohezynnej. Wnuk i Legat (2002), rozpatrując szczegółowo ów model, otrzymali następujące zależności

$$\frac{dR}{dl} = M_K - y + y\Lambda_I \left(\frac{l}{y}\right)$$

$$\Lambda_I(\lambda) = \sqrt{1-\lambda} \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) - \frac{\lambda^2}{4} \ln \left[\frac{1 + \sqrt{1-\lambda}}{1 - \sqrt{1-\lambda}} \right] \quad (4.1)$$

$$R = \frac{2.5}{2} l Q^2, Q = \sqrt{\frac{R}{1.25l}}$$

Gdy $R \approx \Delta$, lewa strona równania różniczkowego (4.1) ulega znacznemu uproszczeniu, mianowicie

$$\frac{dR}{dl} = M_K - \frac{R}{\Delta} + \frac{4}{3} \frac{R}{\Delta} \left[1 - \frac{\Delta}{R}\right]^{\frac{3}{2}} \quad (4.2)$$

Wprowadzając zmienne bezwymiarowe przepisujemy powyższe równanie w postaci

$$\frac{dY}{dX} = F_K(Y, \rho) = M_K - \rho Y + \frac{4}{3} (\rho Y) \left[1 - \left(\frac{l}{\rho Y}\right)\right]^{\frac{3}{2}} \quad (4.3)$$

Moduł kohezynym przyjmujemy o 20% wyższy niż jego minimalna wartość

$$M_K^{min} = \rho - \frac{4}{3} \rho \left[1 - \left(\frac{l}{\rho}\right)\right]^{\frac{3}{2}} \quad (4.4)$$

Przypomnijmy, że dla wartości modułu M_K równej lub też poniżej wartości minimalnej, ruch podkrytyczny nie istnieje i początek propagacji szczeliny jest równoważny inicjacji pęknięcia katastrofalnego.

Dla porównania podamy równanie krzywej R wynikające z połączenia modelu Dugdale'a oraz kwantowego kryterium Wnuka (2.5). Korzystając z uogólnionego szeregu potęgowego upraszczamy równanie (2.11a) w następujący sposób

$$\frac{dR}{dl} = M_D - \frac{R}{\Delta} + \frac{2}{3} \frac{R}{\Delta} \left[1 - \frac{\Delta}{R}\right]^{\frac{3}{2}} \quad (4.5)$$

Na koniec, przepisujemy to wyrażenie w postaci bezwymiarowej

$$\frac{dY}{dX} = M_D - \rho Y + \frac{2}{3} \rho Y \left[1 - \left(\frac{l}{\rho Y}\right)\right]^{\frac{3}{2}} \quad (4.6)$$

Tutaj moduł M_D obliczamy ze wzoru

$$M_D = 1.2 \left[\rho - \frac{2}{3} \rho \left[1 - \left(\frac{l}{\rho}\right)\right]^{\frac{3}{2}} \right] \quad (4.7)$$

Gdy $\rho = 1.2$, moduły występujące w równaniach (4.3) oraz (4.6) wynoszą

$$\begin{aligned} M_K &= 1.309 \\ M_D &= 1.375 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Dla $\rho \rightarrow 1$ obydwie krzywe $Y_D = Y_D(X)$ oraz $Y_K = Y_K(X)$ są liniowe i posiadają niemal identyczne nachylenie. Model Dugdale'a – w swojej kwantowej wersji – pozwala obliczyć punkt krytyczny. Na przykład, dla $\rho = 1.2$ oraz $X_0 = 10$, otrzymujemy $X_{kryt} = 10.468$ oraz $Q_{kryt} = 0.460$, co różni się od punktu Griffitha, $X_G = 10$ oraz

$Q_G = 0.4472$ bardzo niewiele. Różnica wynosi dla długości krytycznej tylko 4.7%, natomiast dla obciążenia Q_{kryt} różnica sięga 2.9%. Jednakże, wartości te mogą gwałtownie wzrosnąć, gdy mamy do czynienia z mikro-szczeliną, której rozmiar jest rzędu wielkości cząstki Neubera. Problem ten zasługuje na dalsze dociekania. Model Knaussa, w swojej kwantowej postaci, opisuje ruch quasi-statycznej szczeliny w tak wąskim zakresie, że praktycznie wszystkie parametry punktu krytycznego, X_{kryt} , Y_{kryt} oraz Q_{kryt} są identyczne z odpowiednimi wartościami Griffitha, które podano powyżej.

5. Oszacowanie charakterystycznych stałych mikrostruktury

Postaramy się tutaj podać interpretację fizyczną – oraz numeryczną – dla typowych rozmiarów, takich jak długość strefy kohezynnej R oraz wielkość cząstki Neubera Δ , dla wybranych zakresów własności materiałowych. W szczególności rozpatrzmy trzy możliwe przypadki stanu materiału:

1. graniczny przypadek materiału idealnie kruchego,
2. materiał o własnościach quasi-kruchych, z uwzględnieniem plastyczności, oraz
3. graniczny przypadek materiału idealnie plastycznego, kiedy granica płynięcia zmierza do zera. Zdajemy sobie tutaj sprawę, że pierwszy i trzeci przypadek reprezentują pewne wyidealizowane zachowania materiału, podczas gdy przypadek drugi odtwarza z dobrym przybliżeniem zachowanie rzeczywistych materiałów, najczęściej rozważanych w inżynierii materiałowej.

W granicznym przypadku materiału idealnie kruchego stałe Δ oraz R można oszacować w oparciu o model atomistyczny procesu dekohezji. Zaczniemy od cząstki Neubera, której rozmiar dla dowolnego materiału można oszacować przy pomocy znanego w mesomechanice wzoru

$$\Delta = \frac{EG}{\sigma_{mol}^2} \quad (5.1)$$

Moduł Younga E , jednostkowa praca zniszczenia G , mierzona w jednostkach energii na jednostkę powierzchni, oraz naprężenie molekularne σ_{mol} potrzebne są do oszacowania “kwantu struktury” materiału, Δ . Dla idealnie sprężystego materiału trzeba rozważyć te trzy istotne parametry na poziomie atomistycznym. Jeśli symbol b ($= 10^{-10}$ m) będzie oznaczać odległość dwóch sąsiednich atomów w stanie równo-wagi termicznej, to praca zniszczenia, równać się będzie podwojonej energii powierzchniowej γ , którą z kolei można wyliczyć jako iloczyn σ_{mol} oraz odległości b (taka jest bowiem w przybliżeniu wielkość pola zawartego pod krzywą opisującą siły między-atomowe w funkcji odległości). Mamy zatem

$$G = 2\gamma = 2(b\sigma_{mol}) = 2b\left(\frac{E}{30}\right) \quad (5.2)$$

Zastosowaliśmy powyżej znane w fizyce ciała stałego przybliżenie

$$\sigma_{mol} \approx \left(\frac{1}{30}\right)E.$$

Jeśli podstawimy te wartości do wzoru (5.1), to otrzymamy

$$\Delta = 60b = 6 \cdot 10^{-9} \text{ m} \quad (5.3)$$

Stała o takim wymiarze należy do zakresu nano-mechaniki. Długość strefy kohezynnej, R , w tym granicznym przypadku redukuje się do wielkości cząsteczki Neubera, a zatem mamy $R = \Delta$, gdzie Δ określone jest wzorem (5.3). Dla idealnego kontinuum, gdzie

nawet atomy nie istnieją, zarówno R jak i Δ równają się zero (i to jest właśnie przypadek graniczny opisany teorią Griffitha).

Dla materiału quasi-kruchego, jednostkowa praca zniszczenia równa jest krytycznej wartości całki Rice’a, czyli

$$G = J_c = \delta_i \sigma_0 \quad (5.4)$$

Tutaj δ_i oznacza rozwarcie wierzchołkowe, natomiast σ_0 jest granicą plastyczności. Długość strefy kohezynnej R oszacujemy na podstawie uniwersalnego wzoru, zobacz Wnuk i Legat (2002):

$$R \approx \frac{EG}{\sigma_0^2} \quad (5.5)$$

Jeśli założymy, że rozwarcie wierzchołkowe w momencie inicjacji pęknięcia równe jest pewnej wielokrotności rozmiaru ziarna d , powiedzmy $\delta_i = kd$ (gdzie k jest liczbą między 2 a 3), to wzór (5.5) sprowadzi się do postaci

$$R = \frac{E}{\sigma_0} (kd) = \frac{kd}{\epsilon_0} \quad (5.6)$$

Stała ϵ_0 oznacza odkształcenie materiału na granicy płynięcia ($=\sigma_0/E$), i dla stali niskowęglowych wynosi około 0.002, natomiast wielkość ziarna szacuje się w metaloznawstwie na 10^{-6} m. Tak więc, ze wzoru (5.6) otrzymujemy następujące oszacowanie

$$R = (3)(500)10^{-6} \text{ m} = 1.5 \text{ mm} \quad (5.7)$$

Iloraz Δ/R można obliczyć ze wzoru Wnuka-Mury,

$$\frac{\Delta}{R} = \frac{1}{1 + \frac{\epsilon_0^f p^2}{\epsilon_0}} \quad (5.8)$$

zob. Wnuk i Mura (1983). W przybliżeniu iloraz ten jest proporcjonalny do $\epsilon_0^f/\epsilon_{pl}^f$, a zatem cząsteczka Neubera dla rozważanego materiału będzie posiadać długość rzędu

$$\Delta = (1/100)R = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 15 \mu\text{m} \quad (5.9)$$

W powyższym rachunku przyjęto, że plastyczna część całkowitego odkształcenia mierzonego w próbie jedno-osiowego rozciągania ϵ_{pl}^f wynosi 0.2, a zatem stosunek ϵ_0 i ϵ_{pl}^f jest równy $0.002/0.2 = 1/100$. Z rozważań tych wynika, że podczas gdy długość strefy kohezynnej R jest rzędu milimetrów, to rozmiar cząstki Neubera równa się około piętnaście mikronów. Ten zakres skali jest także rozpatrywany w zagadnieniach współczesnej mesomechaniki.

Na koniec rozpatrzmy stałe Δ i R dla materiału idealnie plastycznego (jak na przykład mono-kryształ miedzi w temperaturze pokojowej). W literaturze anglo-saskiej taki graniczny przypadek pęknięcia nazwany został słowem “rupture”, dla odróżnienia od powszechnie używanych terminów “fracture” oraz “failure”. Jest to wyidealizowany przykład, kiedy materiał faktycznie nie pęka, tak jak ma to miejsce w stanie kruchym, lub quasi-kruchym, lecz “rozłączy się” jak wół roztopiony metal. Przyjmując, że granica płynięcia a także odkształcenie ϵ_0 zmierzają do zera, ze wzoru (5.6) otrzymujemy górna granice dla R , mianowicie nieskończoność, natomiast cząstka Neubera, której wielkość można również oszacować na podstawie wyrażenia

$$\Delta \approx R \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_{mol}} \right)^2 \quad (5.10)$$

zamienia się w punkt. Oczywiście rozważania tego typu nie mają na celu ścisłych numerycznych obliczeń, lecz dają jedynie pogląd na rząd wielkości omawianych tu stałych materiałowych.

Podobne dociekania, lecz oparte o fraktalną mechanikę zniszczenia, są przedmiotem pracy Wnuka i Yavarego (2003), gdzie zamiast dwuwymiarowej powierzchni szczeliny rozważa się obiekt reprezentowany pewnym fraktalem.

6. Bibliografia

- [1] Wnuk M. P.: *Accelerating Crack in a Viscoelastic Solid Subject to Subcritical Stress Intensity*, Proceedings of the International Conference on Dynamic Crack Propagation, pp. 273-280. edited by G. C. Sih, Lehigh University, published by Noordhoff, Leyden, The Netherlands 1972.
- [2] Wnuk M. P.: *Quasi-Static Extension of a Tensile Crack Contained in a Viscoelastic-Plastic Solid*, J. Appl. Mechanics 1974, Vol. 41, No. 1, pp. 234 – 242.
- [3] Wnuk M. P.: *Podstawy Mechaniki Pękania*, Skrypt Uczelniany AGH, Wydawnictwa Naukowe AGH 1977, Skrypt Nr. 585.
- [4] Rice J. R.: *Mathematical Analysis in the Mechanics of Fracture*, in "Fracture", Vol. 2, 1968, edited by H Liebowitz, New York Academic Press, pp. 191 – 311.
- [5] Wnuk M. P.: *Nonlinear Fracture Mechanics*, co-author and editor of the CISM Courses and Lectures, course No. 314, International Center for Mechanical Sciences, Udine, Italy, published by Springer-Verlag, Berlin 1990.
- [6] Rice J. R., Sorensen E. P.: *Continuing Crack-Tip Deformation and Fracture for Plane Strain Crack Growth*, in Elastic-Plastic Solids 1978, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 26, pp. 263-286.
- [7] Rice J. R., Drugan W. J., Sham T. L.: *Elastic-Plastic Analysis of Growing Cracks*, ASTM STP 700, ASTM, Philadelphia 1980, pp. 189 – 221.
- [8] Wnuk M. P., Legat J.: *Work of Fracture and Cohesive Stress Distribution Resulting from Triaxiality Dependent Cohesive Zone Model*, Int. J. Fracture 2002, Vol. 114, pp. 29 – 46.
- [9] Wnuk M. P., Omidvar B.: *Local and Global Instabilities Associated with Continuing Crack Extension in Dissipative Solids*, Int. J. Fracture 1977, Vol. 84, pp. 237 – 260.
- [10] Wnuk M. P., Omidvar B., Choroszynski M.: *Relationship Between the CTOD and the J-Integral for Stationary and Growing Cracks. Closed Form Solutions*, Int. J. Fracture 1988, Vol. 87, pp. 331 – 343.
- [11] Wnuk M. P., Mura T.: *Effect of Microstructure on the Upper and Lower Limit of Material Toughness in Elastic-Plastic Fracture*, J. Mech. Of Materials 1983, Vol. 2, pp. 33 – 46.
- [12] Xi Zhang, Yiu-Wing Mai and Rob Jeffrey: *A Cohesive and Damage Zone Model for Dynamic Crack Growth in Rate-Dependent Materials*, in print, Int. J. of Solids and Structures 2003.
- [13] Wnuk M. P., Ramesham R., Bolin S.: *Advanced Adhesion and Bonding*, Jet propulsion/Caltech Publication D-17926, Pasadena 2000, CA.
- [14] Wnuk M. P., Yavari A.: *On Estimating Stress Intensity Factors and Modulus of Cohesion for Fractal Cracks*, Engineering Fracture Mechanics 2003, vol. 70, pp. 1659-1674.

Prof dr hab. Miłosz P. Wnuk

Department of Civil Engineering and Mechanics
University of Wisconsin - Milwaukee
Milwaukee, WI 53201, USA
tel. (414) 229-5846, faks (414) 229-6958
e-mail: mpw@uwm.edu
