

WERYFIKACJA KRYTERIÓW PĘKANIA ELEMENTÓW Z KARBAMI TRÓJKĄTNYMI

VERIFICATION OF FRACTURE CRITERIA OF ELEMENTS WITH V-SHAPED NOTCHES

W pracy przedstawiono weryfikację doświadczalną czterech kryteriów pęknięcia przystosowanych do analizy kruchego pęknięcia elementów z karami trójkątnymi w dwuosiowym stanie obciążenia (mode I + II).

In this paper an experimental verification of four fracture criteria adapted for brittle fracture analysis of elements with V-shaped notches under biaxial loading (mode I and II) was presented.

1. Wstęp

W celu określenia stanu wyężenia konstrukcji zawierającej koncentratory wykorzystuje się kryteria pęknięcia. Powinny one umożliwiać analizę zarówno inicjacji, jak i propagacji szczeliny w złożonym stanie obciążenia, a także określać miejsce i kierunek inicjacji pęknięcia oraz krytyczną wartość obciążenia.

2. Kryterium energii uwalnianej

W kryterium tym definiuje się energię potrzebną do utworzenia nowej swobodnej powierzchni (pęknięcia) w ciele o liniowo sprężystej charakterystyce. Dla złożonego stanu obciążeń kryterium to zostało zmodyfikowane [1, 2, 3]. Rozważmy karb trójkątny z propagującą z jego wierzchołka szczeliną o długości l w założonym kierunku ϑ . W podejściu zaproponowanym w pracy [2] zakłada się wirtualny przyrost szczeliny $\Delta l \rightarrow 0$ (zgodnie z jej kierunkiem) w kierunku ϑ_0 maksymalnej wartości uwalnianej energii odkształcenia.

Intensywność energii uwalnianej $G(\vartheta)$ jest pracą naprężeń przed wierzchołkiem odgałęzienia na przemieszczeniach brzegów tego odgałęzienia:

$$G(\vartheta) = - \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta l} \int_0^{\Delta l} [(\sigma_{\vartheta\vartheta}^*(\vartheta=0)u_{\vartheta}^*(\vartheta=\pi) + \tau_{r\vartheta}^*(\vartheta=0)u_r^*(\vartheta=\pi))] dr \quad (1)$$

gdzie r i ϑ są współrzędnymi biegunowymi w układzie o początku

w wierzchołku szczeliny, a $\sigma_{\vartheta\vartheta}^*, \tau_{r\vartheta}^*, u_{\vartheta}^*, u_r^*$ naprężeniami i przemieszczeniami w tym układzie. Przyjmując osobliwy rozkład naprężeń i przemieszczeń w pobliżu wierzchołka założonej szczeliny otrzymujemy:

$$G(\vartheta) = \frac{1+\kappa}{8\mu} [K_I^2(\vartheta) + K_{II}^2(\vartheta)] \quad (2)$$

gdzie K_I i K_{II} są współczynnikami intensywności naprężeń dla szczeliny propagującej z wierzchołka karbu trójkątnego w I i II przypadku obciążenia.

Proces propagacji nastąpi wówczas, gdy maksymalna intensywność energii uwalnianej G w kierunku $\vartheta = \vartheta_0$ osiągnie wartość krytyczną:

$$G(\vartheta = \vartheta_0) = G_c = \frac{1+\kappa}{8\mu} K_{Ic}^2 \quad (3)$$

Założoną długość szczeliny l oblicza się wykorzystując równoważność hipotezy wyężeniowej maksymalnych naprężeń normalnych ($\sigma_{\max} = \sigma_c$) oraz kryterium energii uwalnianej dla przypadku małej szczeliny inicjującej w dnie karbu półokrągłego ($K_I^* = K_{Ic}$):

$$l = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_{Ic}}{1.122\sigma_c} \right)^2 \quad (4)$$

3. Kryterium gęstości energii odkształcenia

W kryterium tym zakłada się, że kierunek propagacji szczeliny ϑ_0 określa minimalna wartość współczynnika gęstości energii odkształcenia sprężystego S zgromadzonej w okolicach wierzchołka karbu trójkątnego [4]. Współczynnik ten jest iloczynem energii sprężystej odkształcenia dU_s zgromadzonej w jednostkowej objętości dV oraz odległości r_c od wierzchołka karbu, a mianowicie:

$$S = \frac{dU_s}{dV} r_c \quad (5)$$

Propagacja pęknięcia następuje wówczas, gdy współczynnik S osiągnie wartość krytyczną:

$$S(\vartheta_0) = S_c = \frac{\kappa-1}{8\mu} K_{Ic}^2 \quad (6)$$

W przypadku wykorzystania powyższego kryterium do analizy pęknięcia elementów z karami trójkątnymi niezbędna jest znajomość parametru r_c . Określamy go za pomocą hipotezy maksymalnych naprężeń normalnych zastosowanej np. dla elementu z karem półokrągłym. W przypadku płaskiego stanu naprężenia otrzymujemy:

$$r_c = (1-\nu) \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_c} \right)^2 \quad (7)$$

4. Zmodyfikowane kryterium McClintocka

W warunku odkształceniowym McClintocka [5] zakłada się, że propagacja szczeliny nastąpi wówczas, gdy odkształcenie normalne $\varepsilon_{\vartheta\vartheta}$ w pewnej małej odległości ρ_c od wierzchołka szczeliny osiągnie wartość krytyczną ε_c , czyli:

$$\varepsilon_{\vartheta\vartheta}(r = \rho_c) = \varepsilon_c \quad (8)$$

Do analizy kruchego pęknięcia stosowana jest naprężeniowa postać tego kryterium. Propagacja szczeliny ma miejsce wówczas, gdy naprężenia obwodowe $\sigma_{\vartheta\vartheta}$ w odległości $r = \rho_c$ osiągną wartość krytyczną σ_c , a mianowicie:

$$\max_{\vartheta} \sigma_{\vartheta\vartheta}(r = \rho_c) = \sigma_c. \quad (9)$$

Z warunku maksimum (9) można określić kierunek propagacji pęknięcia. W przypadku analizy pęknięcia elementów z karami trójkątnymi wielkość ρ_c jest odległością od wierzchołka karbu do punktu w którym mierzy się wartość $\sigma_{\vartheta\vartheta}$. Parametr ten można wyznaczyć wykorzystując rozwiązanie asymptotyczne na $\sigma_{\vartheta\vartheta}$ oraz kryterium Griffitha - Irwina dla przypadku rozrywanej szczeliny:

$$\rho_c = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_c} \right)^2 \quad (10)$$

5. Nielokalne naprężeniowe kryterium kruchego pęknięcia

W prezentowanym kryterium [6, 7] zakłada się, że inicjacja pęknięcia następuje wówczas, gdy uśredniona na odcinku d_0 funkcja naprężeń normalnych $R_\sigma(\sigma_n, \tau_n)$ i tnących wywołujących dekohezję osiągnie wartość krytyczną, czyli:

$$R_f = \max_{(\vartheta, \mathbf{x}_0)} \bar{R}_\sigma(\sigma_n, \tau_n) = \max_{(\vartheta, \mathbf{x}_0)} \left[\frac{1}{d_0} \int_0^{d_0} R_\sigma(\sigma_n, \tau_n) dr \right] = 1 \quad (11)$$

gdzie: R_f - współczynnik uszkodzenia, $\bar{R}_\sigma(\sigma_n, \tau_n)$ - nielokalna funkcja uszkodzenia, $R_\sigma(\sigma_n, \tau_n)$ - lokalna funkcja uszkodzenia materiału, σ_n, τ_n - normalne i tnące naprężenia w płaszczyźnie fizycznej, \mathbf{x}_0 - początek lokalnego układu współrzędnych (r, ϑ) określający miejsce inicjacji szczeliny.

Długość strefy uszkodzenia określa na jakim odcinku uśredniona jest funkcja pęknięcia. Parametr ten można wyznaczyć wykorzystując kryterium Griffitha - Irwina oraz nielokalny warunek (11) dla rozrywanej szczeliny [8]:

$$d_0 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2K_{Ic}}{\sigma_c} \right)^2 \quad (12)$$

W przypadku analizy pęknięcia elementów z polimetakrylanu metylu jako funkcję pęknięcia materiału zastosowano warunek naprężeń normalnych:

$$R_\sigma(\sigma_n) = \sigma_n / \sigma_c \quad (13)$$

6. Doświadczalna weryfikacja kryteriów pęknięcia

Do weryfikacji przedstawionych kryteriów pęknięcia wykorzystano badania doświadczalne pęknięcia opisane w pracy [9]. Wykonano je na płaskich próbkach z polimetakrylanu metylu obciążonych dwuosiowo (siłą rozciągającą P i styczną T). W każdej z próbek wycięto 2 symetryczne karby trójkątne o kącie rozwarcia 2β .

W analizie osobliwego rozkładu naprężeń w okolicy wierzchołka karbu trójkątnego wykorzystano uogólnione współczynniki intensywności naprężeń K_I^λ - dla rozciągania oraz K_{II}^λ - dla ścinania wzdłużnego. Wartości tych współczynników obliczono za pomocą metody całki niezmienniczej H [10]. W tabeli 1 podano wartości współczynników K_I^λ oraz K_{II}^λ odniesionych do obciążenia próbki odpowiednio: siłą rozciągającą P i siłą styczną T .

Tab. 1. Wartości K_I^λ i K_{II}^λ dla próbek z karami trójkątnymi o kącie rozwarcia 2β

2β [deg]	λ_I	$\xi_I = K_I^\lambda / P$ MPa m ^{1-λ_I} / kN	λ_{II}	$\xi_{II} = K_{II}^\lambda / T$ MPa m ^{1-λ_{II}} / kN
20	0.5004	0.6166	0.5620	0.6737
40	0.5035	0.6323	0.6382	0.9981
60	0.5122	0.6673	0.7309	1.4772
80	0.5304	0.7350	0.8434	2.3112

Tylko w przypadku kryterium energii uwalnianej wykonano obliczenia klasycznych współczynników intensywności naprężeń dla szczeliny w wierzchołku karbu. Uwzględniono różne kąty rozwarcia korbów oraz nachylenia szczeliny [11].

W celu wyznaczenia wartości naprężenia niszczącego σ_c obliczono rozkłady naprężeń w próbce z karbem półkolistym w momencie pęknięcia. Otrzymano: $\sigma_c = 102.8$ MPa.

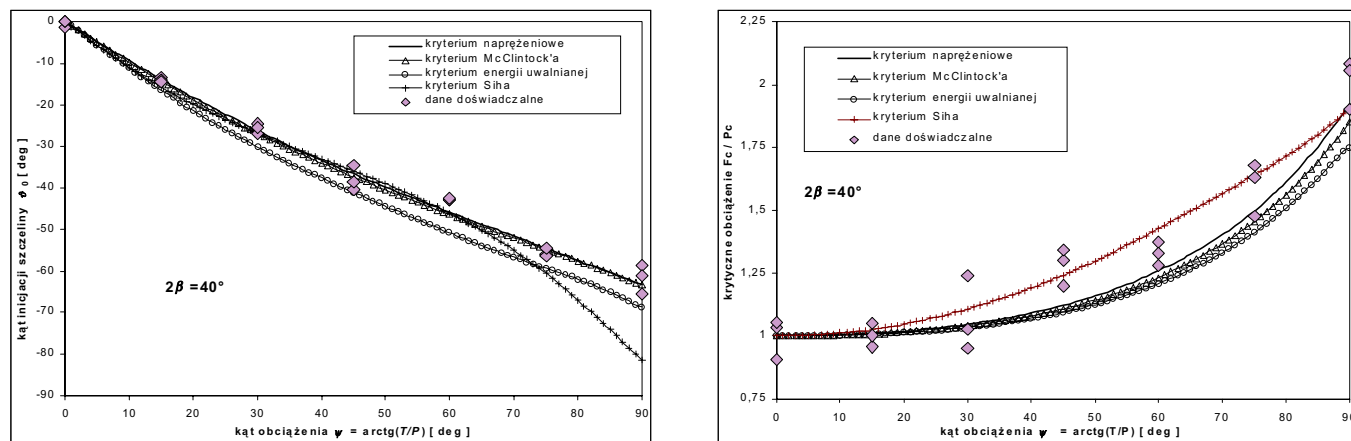
Wartość K_{Ic} wyznaczamy jako średnią na podstawie krytycznych wartości K_{Ic}^λ dla kątów rozwarcia karbu $2\beta = 20^\circ \div 60^\circ$ (dla tych kątów wykładnik pola przemieszczeń λ_I zmienia się nieznacznie) [10]. Otrzymano $K_{Ic} = 1.202$ MPa m^{0.5}.

Wyznaczone parametry materiałowe σ_c i K_{Ic} posłużyły do obliczenia parametrów nielokalności dla poszczególnych kryteriów. Otrzymano: $l = 0.0000347$ m; $d_0 = 0.000087$ m; $\rho_c = 0.0000218$ m; $r_c = 0.0000888$ m.

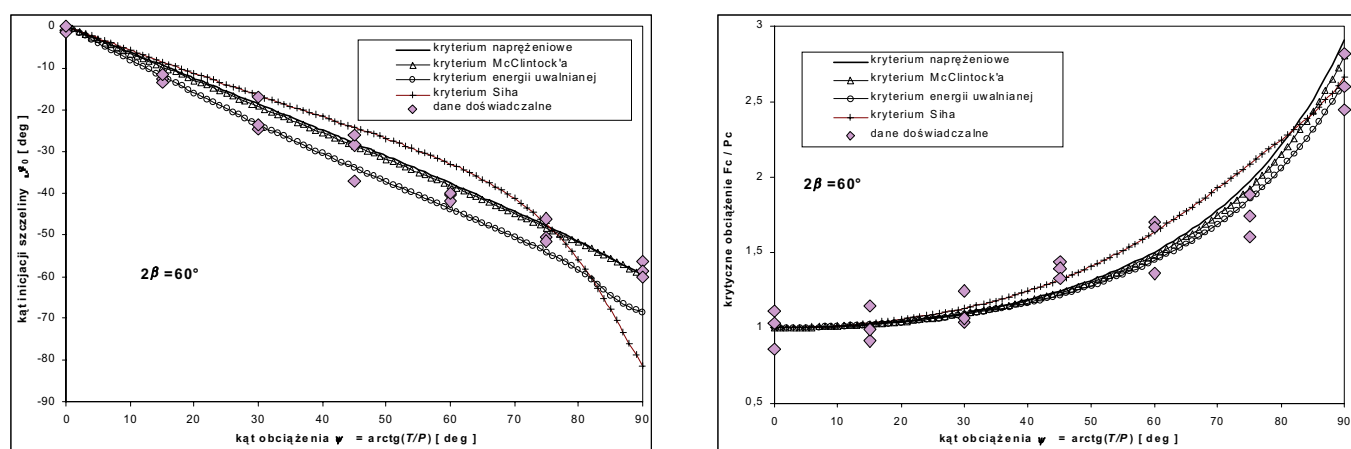
Na rysunkach 1 i 2 przedstawiono wyniki obliczeń prognozowanych kierunków pęknięcia ϑ_0 oraz stosunków krytycznych wartości obciążeń: całkowitego do rozciągającego F_c/P_c , dla elementów z karami trójkątnymi o kącie rozwarcia $2\beta = 40^\circ$ oraz 60° , w zależności od kąta obciążenia ψ [10]. Obciążenie F_c jest krytyczną siłą zadaną na maszynie wytrzymałościowej, natomiast P_c jest krytyczną siłą podczas prostego rozciągania, tzn. gdy $\psi = 0$ (wtedy otrzymujemy $F_c = P_c$). Czyste ścinanie (w środkowym przekroju próbki) występuje gdy $\psi = 90^\circ$. Dla kątów ψ zawartych między 0° a 90° uzyskujemy złożony stan obciążenia.

7. Wnioski

Prezentowane kryteria umożliwiają określenie obciążenia krytycznego oraz kierunku propagacji szczeliny. Wymagają one wprowadzenia parametrów nielokalności, np. założenia istnienia szczeliny lub strefy uszkodzeń o skończonych wymiarach. Najbardziej zbliżone do danych eksperymentalnych są wartości kątów inicjacji i krytycznych obciążeń prognozowane przy wykorzystaniu nielokalnego naprężeniowego kryterium kruchego pęknięcia oraz zmodyfikowanego kryterium McClintocka. Obliczenia z wykorzystaniem tych kryteriów nie są skomplikowane, gdyż korzysta się z rozkładów naprężeń dla rzeczywistego kształtu elementu konstrukcyjnego. Dobre wyniki uzyskuje się również za pomocą kryterium uwalnianej energii odkształcenia, jednak obliczenia z wykorzystaniem tego kryterium są pracochłonne. Przedstawione kryteria pęknięcia, choć nie zawsze mają jasną interpretację fizyczną, pozwalają na prognozowanie, z dobrą dokładnością, procesu pęknięcia elementów z karami trójkątnymi w dwuosiowym stanie obciążenia - co jest decydujące w przypadku ich zastosowania w obliczeniach inżynierskich.



Rys. 1. Kierunki pękania ϑ_0 oraz stosunek sił krytycznych F_c/P_c dla elementu z karami trójkątnymi o kącie rozwarcia $2\beta=40^\circ$



Rys. 2. Kierunki pękania ϑ_0 oraz stosunek sił krytycznych F_c/P_c dla elementu z karami trójkątnymi o kącie rozwarcia $2\beta=60^\circ$

8. Literatura

- [1] Hussain M.A., Pu S.L., Underwood J.: *Strain energy release rate for a crack under combined Mode-I and -II*, ASTM STP, 560(1974), 2-28.
- [2] Palaniswamy K., Knauss E.G.: *Propagation of a crack under general in-plane tension*, Int. J. Fract. Mech., 8(1972), 114-117.
- [3] Seweryn A.: *A non-local stress and strain energy release rate mixed mode fracture initiation and propagation criteria*, Eng. Fract. Mech., 59(1998), 737-760.
- [4] Sih G.C.: *Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems*, Int. J. Fract., 10(1974), 305-321.
- [5] McClintock F.A.: *Ductile fracture instability in shear*, Trans. ASME, J. Appl. Mech., 25(1958), 582-588.
- [6] Seweryn A., Mróz Z.: *A non-local stress failure condition for structural elements under multiaxial loading*, Eng. Fract. Mech., 51(1995), 955-973.
- [7] Mróz Z., Seweryn A.: *Non-local failure and damage evolution rule: Application to a dilatant crack model*, J. Phys., 8(1998), 257-268.
- [8] Seweryn A.: *Brittle fracture criterion for structures with sharp notches*, Eng. Fract. Mech., 47(1994), 673-681.
- [9] Seweryn A., Poskrobko S., Mróz Z.: *Brittle fracture in plane elements with sharp notches under mixed-mode loading*, J. Eng. Mech. ASCE, 123(1997), 535-543.
- [10] Łukaszewicz A., Seweryn A.: *Modelowanie kruchego pęknięcia elementów z karami trójkątnymi (część I i II)*, Zesz. Nauk. P. Białost., Mech., 23(2001), 87-102, 103-128.
- [11] Seweryn A., Łukaszewicz A.: *Energia odkształcenia uwalniana w procesie propagacji szczeliny z wierzchołka karbu trójkątnego*, XVII Sympozjum Zmęczenia Materiałów i Konstrukcji, ATR Bydgoszcz (1998), 287-292.

Niniejszą pracę wykonano w ramach realizacji Projektu Badawczego nr 8 T07A009 20
finansowanego przez Komitet Badań Naukowych
