

STATYSTYCZNA ANALIZA TOLERANCJI STATISTICAL ANALYSIS OF TOLERANCE

W artykule omówiono podstawowy tolerowania wymiarów części maszyn oraz zasady statystycznej analizy tolerancji wymiarów. W statystycznej analizie tolerancji uwzględniono podstawowe parametry określające stabilność procesu technologicznego. Do tych parametrów zaliczono odchylenie od symetrii i koncentrację. Analizę statystyczną tolerancji przeprowadzono dla pięciu przypadków niestabilności procesu, wyznaczając tolerancję zaobserwowaną oraz prawdopodobieństwo wstąpienia błędu I-go rodzaju dla określonej tolerancji konstrukcyjnej.

The paper indicates the grounds for tolerating machine elements' dimensions as well as presents principles of statistical analysis of dimensional tolerance. Statistical analysis of tolerance comprises basic parameters defining stability of technological process such as deviation from the symmetry and concentration. The analysis was carried out for 5 cases of process instability, indicating real tolerance and probability of occurring type 1 error for a specified structural tolerance.

1. Wstęp

Prawidłowość współpracy elementów maszyn, w dużym stopniu zależy od właściwości geometrycznych powierzchni współpracujących. Do właściwości tych można zaliczyć:

- wymiary określające położenie powierzchni,
- kształty elementarnych brył geometrycznych,
- położenie wzajemne elementarnych brył geometrycznych,
- strukturę geometryczną powierzchni.

Wymienione właściwości geometryczne powierzchni warstwy wierzchniej winny być uzyskane w procesie technologicznym obróbki danego elementu. Procesy technologiczne charakteryzują się określoną dokładnością, dlatego w rzeczywistości określone właściwości geometryczne uzyskuje się z pewnym przybliżeniem do założonych.

Z uwagi na skończoną dokładność procesów technologicznych, wprowadzono w technice wartości tolerowane, a w budowie maszyn w odniesieniu do właściwości geometrycznych powierzchni - **tolerancję** określającą dokładność wykonania:

- wymiaru,
- kształtu,
- położenia,
- gładkości powierzchni (chropowatość).

1. Introduction

The correct co-operation between machine elements seems to be greatly dependant on geometrical features of mating surfaces. Such features include:

- dimensions determining position of the surface,
- shapes of elementary geometrical solids,
- reciprocal position of elementary geometrical solids,
- geometrical structure of the surface.

All those geometrical features of the upper surface layer should be obtained during the technological process aimed at treating the element. Technological processes are characterised by a definite accuracy, and so the values of some geometrical features gained in reality are to some extent approximate to those that have been assumed.

Considering the limited accuracy of technological process, it has been decided to introduce tolerable values into technology, whereas mechanical engineering approves **tolerance** (in relation to geometrical features of the surface) determining measuring accuracy of:

- dimension,
- shape,
- position,
- surface smoothness (roughness).

2. Tolerancja wartości

Wartość tolerowana charakteryzuje się tym, że dopuszcza w procesie technologicznym pewne granice odchyłeń wartości rzeczywistej od wartości nominalnej. Granice te stanowią dwie wartości, tzw. górną wartość graniczną (górny wymiar graniczny) **B** i dolną **A**. Tolerancja **T** jest różnicą tych wartości:

$$T = B - A \quad (1)$$

Wartości graniczne są związane z wartością nominalną N odchyłkami granicznymi tzw. *górną odchyłką* $ES(es)$ i *dolną odchyłką* $EI(ei)$ odpowiednio:

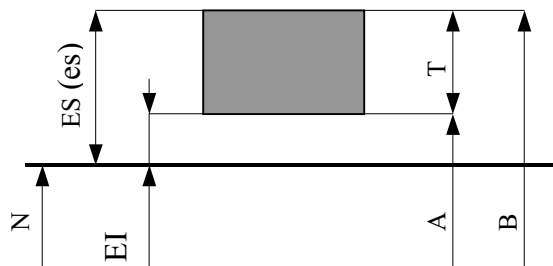
$$B = N + ES(es) \quad (2)$$

$$A = N + EI(ei) \quad (3)$$

Podstawiając związki (2) i (3) do (1) uzyskamy związek tolerancji wartości z odchyłkami granicznymi

$$T = ES(es) - EI(ei) \quad (4)$$

Związki zachodzące pomiędzy tolerancją, wartościami granicznymi lub odchyłkami od wartości nominalnej przedstawiono w sposób graficzny na (rys.1).



Rys. 1. Graficzne przedstawienie wartości tolerowanej

Fig. 1. Graphical presentation of tolerable value

Należy tu jeszcze wspomnieć, że oprócz wyżej wymienionych odchyłek istnieje jeszcze tzw. pojęcie odchyłki podstawowej i odchyłki zaobserwowanej (zmierzonej).

Odchyłką podstawową będziemy nazywać odchyłkę górną lub dolną $ES(EI)$ lub $es(ei)$ w zależności od tego, która z tych dwóch odchyłek będzie przyjęta do określenia położenia pola tolerancji względem wartości nominalnej. Obowiązuje zasada przyjmowania za odchyłkę podstawową tej odchyłki, względem której pole tolerancji leży w głąb materiału dla wałków i otworów oznaczonych od $a \div h$ i $A \div H$, a dla pozostałych wałków i otworów tej, której wartość bezwzględna jest mniejsza.

2. Value tolerance

Tolerable value allows the real value to be to a certain degree deviated from nominal value in the technological process. Such limits are bound within two values, so-called upper boundary value (upper boundary dimension size) **B** and lower **A**. Tolerance **T** can be then defined as a following difference:

$$T = B - A \quad (1)$$

Boundary values are related to nominal value N by the boundary deviations *upper deviation* $ES(es)$ and *lower deviation* $EI(ei)$:

$$B = N + ES(es) \quad (2)$$

$$A = N + EI(ei) \quad (3)$$

By substituting the relations (2) and (3) to (1) it is possible to obtain the dependence between value tolerance and boundary deviations

$$T = ES(es) - EI(ei) \quad (4)$$

The relations between tolerance, boundary values or deviations from nominal value are presented graphically (fig.1).

It needs to be mentioned that except for the deviations referred above two other types of deviations can be distinguished, so-called basic deviation and real deviation (measured).

Basic deviation is supposed to be either upper or lower deviation $ES(EI)$ or $es(ei)$ as depending on the fact, which of them will be assumed to assess the position of tolerance zone towards the nominal value. There is a rule that deviation, which tolerance zone is located far inside the material (for rollers and holes marked as $a \div h$ and $A \div H$), and which relative value is lower (for other rollers and holes) should be accepted as a basic deviation.

Odchyłką zaobserwowaną $ER(er)$ będziemy nazywać różnicę pomiędzy wartością rzeczywistą (zmierzoną), a wartością nominalną. Różnicę pomiędzy odchyłką rzeczywistą $ER(er)$ a podstawową $ES(EI)$ lub $es(ei)$ będziemy nazywać **błędem technologicznym** ΔT .

$$\Delta T = |ER - ES(EI)| \leq T_0 \text{ dla otworu} \quad (5)$$

$$\Delta T = |er - ei(es)| \leq T_w \text{ dla wałka} \quad (6)$$

Znajomość wartości odchyłek zaobserwowanych pozwala ustalić wartość błędu technologicznego i potwierdzić prawidłowość przeprowadzenia danej operacji, jeżeli wartość błędu technologicznego jest mniejsza od założonej tolerancji.

3. Technologiczne błędy przypadkowe

Analiza błędów technologicznych ΔT może być oparta na modelu o charakterze zarówno zdeterminowanym jak i probabilistycznym. Na modelu zdeterminowanym opiera się tolerowanie klasyczne, w którym zakłada się stałą wartość graniczną błędu technologicznego. Probabilistyczny model błędów technologicznych opiera się na założeniu nieznaności prawdziwej wartości błędu ΔT_p a tylko jego oszacowania ΔT . Występująca różnica $\Delta T - \Delta T_p$ niezgodności tych błędów, nieznaną co do wartości, podlega prawom probabilistycznym i w związku z tym może być modelowana zmienną losową.

Rzeczywisty przedział wartości technicznie poprawnych ΔT_r (tolerancja zaobserwowana) różni się od tolerancji konstrukcyjnej T . Powodem tej różnicy są m. in. **technologiczne błędy przypadkowe**.

Są dwa zasadnicze źródła technologicznych błędów przypadkowych:

- niestabilność i zużycie układu obrabiarka, uchwyt-przedmiot, narzędzie,
- błędy ustalenia i zamocowania przedmiotu obrabianego oraz błędy pomiarów po obróbce.

Błędy przypadkowe można zaobserwować jako brak powtarzalności wyników w warunkach praktycznie niezmiennych. Brak powtarzalności jest powodowany sumowaniem się wielu drobnych błędów o zmieniających się znakach i wartościach, przy czym:

- błędy dodatnie jak i ujemne co do wartości są jednakowo prawdopodobne (symetria),
- prawdopodobieństwo wystąpienia błędu małego co do wartości jest większe od prawdopodobieństwa wystąpienia błędu dużego co do wartości (koncentracja).

Real deviation $ER(er)$ - it is a difference between real (measured) and nominal value. The difference between real $ER(er)$ and basic deviation $ES(EI)$ or $es(ei)$ will be called **technological error** ΔT .

$$\Delta T = |ER - ES(EI)| \leq T_0 \text{ for a hole} \quad (5)$$

$$\Delta T = |er - ei(es)| \leq T_w \text{ for a roller} \quad (6)$$

The acquaintance with the values of real deviations makes it possible to estimate technological error and verify whether the process has been carried out properly if technological error is lower than the tolerance assumed.

3. Technological random errors

Analysis of technological errors ΔT may be based on two model types: determined and probabilistic. Determined model, in which the boundary value of technological error is assumed to be constant, seems to be the base of classical tolerance, while probabilistic model of technological errors is grounded on the assumption that what we are acquainted with is not the real error ΔT_p , but only its estimated value ΔT . The discrepancy $\Delta T - \Delta T_p$, of indefinite value is subject to probabilistic rules and can be modelled by random variable.

Real range of technically correct values ΔT_r (real tolerance) differs from structural tolerance T , and such a distinction is, among other things, caused by **technological random errors**.

There are two main sources of technological random errors:

- instability and wear of the OUPN system,
- errors of PO settlement and fixation and measurement errors after treatment.

Random errors may be observed as a lack of results' repeatability under practically unchangeable conditions. The lack of repeatability is brought about by summing many small errors of unstable characters and values, but:

- there is an equal probability (symmetry) of occurring both positive and negative errors,
- there is a higher probability of occurring minor than major errors (concentration).

4. Statystyczna ocena tolerancji rzeczywistej

Z uwagi na występowanie w procesie technologicznym błędów przypadkowych, jako tolerancję zaobserwowaną T_r , można przyjąć podwojoną wartość maksymalnej niepewności technologicznej $\Delta W_{P_{max}}$ dla której ryzyko błędu I-rodzaju będzie mniejsze od $\alpha=1-P_u$ a więc

$$T_r = 2\Delta W_{P_{max}} \quad (7)$$

Tolerancję zaobserwowaną można zdefiniować w sposób statystyczny, jako przedział o szerokości równej podwojonej maksymalnej wartości różnicy $W_i - \bar{W}$, wyrażony w liczbie u_i odchyłeń standardowych $S_{(i)}$ (rys.2).

$$T_r = 2|W_i - \bar{W}|_{\max} = (u_2 - u_1)S_{(i)} \quad (8)$$

Do wyznaczenia wartości tej tolerancji należy oszacować odchylenie standardowe $S_{(i)}$ wg wzoru [3]

$$S_{(i)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (W_i - \bar{W})^2}{n-1}} \quad (9)$$

Wartość średnią \bar{W} należy wyznaczyć ze wzoru

$$\bar{W} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_i \quad (10)$$

Prawdopodobieństwo P_u znalezienia wartości poprawnej w przedziale tolerancji zaobserwowanej będzie można wyznaczyć jako różnicę dystrybuanty $\Phi(u_2)$, $\Phi(u_1)$ dla zmiennej standaryzowanej u

$$u_2 = +\frac{|W_i - \mu|}{\sigma}; u_1 = -\frac{|W_i - \mu|}{\sigma} \quad (11)$$

Założmy, że tolerancja zaobserwowana T_r powinna być taka, aby prawdopodobieństwo znalezienia w niej wartości poprawnej wynosiło $P_u=0,98$, a więc ryzyko błędu I-rodzaju będzie równe $(1-P_u)=0,02=2\%$. Dla tej wartości prawdopodobieństwa niech oszacowanie odchylenia standardowego wynosi $S_{(i)}$. Przyjęcie określonej wartości prawdopodobieństwa dla tolerancji zaobserwowanej oznacza, że różnica dystrybuant $\Phi(u_2)$, $\Phi(u_1)$ będzie równa temu prawdopodobieństwu, a więc

$$P_u(u_1 \leq W \leq u_2) = \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} \exp\left(-\frac{(W-u)^2}{2\delta^2}\right) dx = \Phi(u_2) - \Phi(u_1) = 0,98 \quad (12)$$

4. Statistical evaluation of real tolerance

Due to the occurrence of random errors in technological process, real tolerance T_r is assumed to amount to a double value of maximum technological uncertainty $\Delta W_{P_{max}}$ for which the risk of type I error will be lower than $\alpha=1-P_u$, so

$$T_r = 2\Delta W_{P_{max}} \quad (7)$$

Real tolerance can be statistically defined as a range, width of which is equal to double maximum difference $W_i - \bar{W}$, expressed in the number u_i of standard deviations $S_{(i)}$ (fig.2).

$$T_r = 2|W_i - \bar{W}|_{\max} = (u_2 - u_1)S_{(i)} \quad (8)$$

Determination of the tolerance value needs calculating standard deviation $S_{(i)}$ according to the formula [3]

$$S_{(i)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (W_i - \bar{W})^2}{n-1}} \quad (9)$$

The following formula will be applied to assess mean value \bar{W}

$$\bar{W} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_i \quad (10)$$

The probability P_u of finding true value within the real tolerance range can be evaluated as a difference of distribution function $\Phi(u_2)$, $\Phi(u_1)$, for standardized variable u

$$u_2 = +\frac{|W_i - \mu|}{\sigma}; u_1 = -\frac{|W_i - \mu|}{\sigma} \quad (11)$$

If real tolerance T_r is assumed to reach such a level that probability of finding true value is $P_u=0,98$, so the risk of type I error will be $(1-P_u)=0,02=2\%$. For the probability estimation of standard deviation value should be $S_{(i)}$. Taking the specified value of probability for real tolerance means that the difference of distribution function $\Phi(u_2)$, $\Phi(u_1)$ will be equal to the probability, so

Wartości dystrybuant $\Phi(u_2)$, $\Phi(u_1)$ dla krańcowych wartości przedziału tolerancji zaobserwowanej i dla zadanego prawdopodobieństwa P_u można wyznaczyć z następujących wzorów [3]

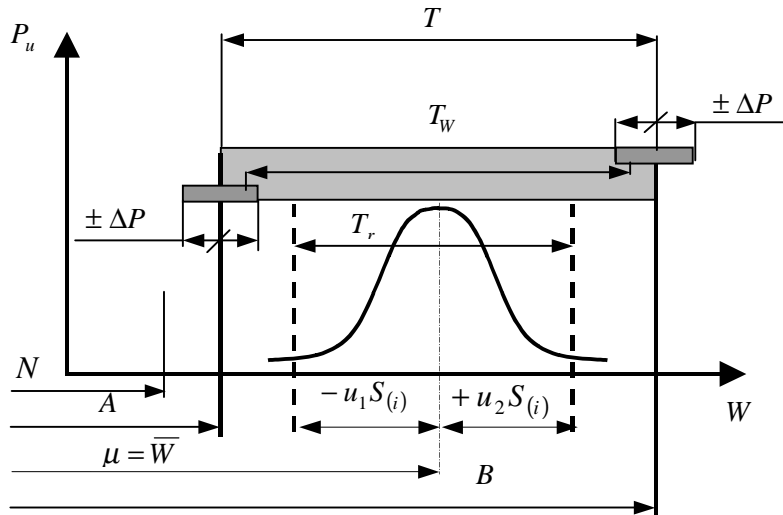
$$\Phi(u_2) = P - 0.5(P_m - P_u) = 0,99865 - 0,00865 = 0,99 \quad (13)$$

$$\Phi(u_1) = P + 0.5(P_m - P_u) = 0,00135 + 0,00865 = 0,01 \quad (14)$$

Values of distribution function $\Phi(u_2)$, $\Phi(u_1)$ for the boundary values of real tolerance range and for a given probability P_u may be determined according to the following formulas [3]

gdzie: P_m - prawdopodobieństwo dla $\pm 3\sigma$

where: P_m - probability for $\pm 3\sigma$



Rys. 2. Położenie pola tolerancji zaobserwowanej T_r i tolerancji wykonawczej (technologicznej) T_w względem tolerancji wymiaru T (oznaczenia na rysunku są zgodne z oznaczeniami w tekście)

Fig. 2. Position of real tolerance zone and working tolerance (technological) in relation to dimensional tolerance (marks on the figure are the same as those used in the text)

Znając wartości dystrybuant na krańcach przedziału tolerancji można odczytać z tablic dystrybuanty rozkładu normalnego wartości krańcowe tego przedziału wyrażone w mierze odchyłeń standardowych jako równe

$$u_1 \cong -2,3; \quad u_2 \cong +2,3$$

Tolerancja zaobserwowana będzie teraz wynosić

$$T_r = (u_2 - u_1)S_{(I)} = 4,6S_{(I)} \quad (15)$$

Położenie statystycznie wyznaczonej tolerancji zaobserwowanej względem tolerancji konstrukcyjnej przedstawiono na (rys.2).

Powyższa analiza została przeprowadzona przy założeniu, że proces technologiczny jest tak ustabilizowany, że występuje koncentracja, symetria oraz zgodność wartości średniej z konstrukcyjną średnią arytmetyczną. W rzeczywistości pełna symetria i zgodność wartości średniej ze średnią arytmetyczną praktycznie nie występuje z uwagi na niestabilność proce-

If we are acquainted with the values of distribution function at the edges of tolerance range it is possible to read limit values of the range from the tables of distribution function of normal value distribution. Such values are expressed in the measure of standard deviation as equal to

$$u_1 \cong -2,3; \quad u_2 \cong +2,3$$

Real tolerance will now come up to

$$T_r = (u_2 - u_1)S_{(I)} = 4,6S_{(I)} \quad (15)$$

Statistical position of real tolerance towards structural tolerance is presented on fig.2.

The above analysis was carried out at the assumption that technological process is so stabilised that there are: concentration, symmetry and consistency between mean value and structural arithmetic mean. However, in reality full symmetry and consistency between mean and arithmetic values does not practically exist with regard to process instability. It is additionally favoured

sów. Dodatkowo sprzyja temu, występowanie niepewności pomiarowej narzędzi stosowanych do kontroli procesów. Problem ten znany w technologii od dawna rozwiązywano poprzez przyjęcie tzw. tolerancji wykonawczej T_w określonej zależnością [2].

$$T_w = \sqrt{T^2 - (2\Delta P)^2} \quad (16)$$

Tolerancja wykonawcza T_w jest tu związana z dokładnością pomiarową ΔP . Położenie tolerancji wykonawczej względem konstrukcyjnej przedstawiono na (rys.2).

5. Wpływ stabilności procesu technologicznego na tolerancję rzeczywistą

Występowanie i fizyczne oddziaływanie wielu czynników na proces technologiczny, prowadzi do niestabilności charakteryzującej się przypadkowymi zmianami wartości parametrów procesu. Tolerowanie klasyczne z uwzględnieniem tolerancji wykonawczej w takich przypadkach jest mało przydatne, ponieważ dostarcza zbyt mało informacji umożliwiających skutecznie oddziaływanie na niestabilność procesu i w rezultacie na jakość wytwarzanych wyrobów. Z tych względów lepszym sposobem jest stosowanie statystycznej kontroli jakości wraz ze statystycznym badaniem tolerancji zaobserwowanej.

Statystyczne badanie tolerancji zaobserwowanej powinno m.in. obejmować:

- badania zmienności odchylenia standardowego,
- badania zgodności wartości średniej statystycznej ze średnią arytmetyczną wartości granicznych tolerancji konstrukcyjnej,
- badania zgodności wartości średniej i asymetrii odchylenia standardowego.

5.1. Badania wpływu zmienności odchylenia standardowego na tolerancję rzeczywistą

Wartość tolerancji rzeczywistej (7), (8) zależy m.in. od wartości odchylenia standardowego. Odchylenie to może zmieniać swoją wartość przy zachowaniu symetrii i zgodności wartości średniej statystycznej ze średnią arytmetyczną. Zgodnie z (15) przedział tolerancji zaobserwowanej określa iloczyn wartości zmiennej standaryzowanej i odchylenia standardowego, gwarantujący określone prawdopodobieństwo wystąpienia w tym przedziale wartość poprawnej.

Przyjmijmy, że zmienność odchylenia standardowego jest równa $S_2 = 1,5xS_{(1)}$. Dla tego odchylenia standardowego, przy prawdopodobieństwie $P_u = 0,98$ tolerancja zaobserwowana wyniesie zgodnie z (15)

$$T_{r1} = (u_2 - u_1)S_{(2)} = (u_{21} - u_{11})S_{(1)} = 6,9S_{(1)} \quad (16a)$$

by the uncertainty of measuring instruments applied to control processes. Such a problem known in technology for many years has been finally solved by adopting so-called working tolerance expressed by the relation [2].

$$T_w = \sqrt{T^2 - (2\Delta P)^2} \quad (16)$$

Working tolerance T_w is here related to measuring accuracy ΔP . Position of working tolerance towards structural tolerance is presented on fig.2.

5. The impact of process stability on real tolerance

The occurrence and physical interaction of many factors on technological process leads to instability characterised by random changes of process parameter values. Taking into account both classical and working tolerance does not seem to be of much use in such cases, as it provides too few details allowing to successfully react on process instability and as a result on the quality of produced goods. Therefore joint application of statistical quality monitoring and statistical studies on real tolerance tend to be a much better solution.

The statistical studies on real tolerance should include:

- examination of standard deviation variability,
- examination of consistency of the statistical mean value with arithmetic mean of limit structural tolerance values,
- examination of consistency of mean value and asymmetry from standard deviation.

5.1. The studies on the impact of standard deviation variability on real tolerance

Real tolerance value (7), (8) depends, among other things, on the standard deviation value that may change at maintaining symmetry and consistency of mean statistical value with arithmetic value. In accordance with (15) the real tolerance range is determined by the product of standardised variable and standard deviation, guarantying the specified probability that true value is likely to occur within the range.

Let's assume that standard deviation variability is equal to $S_2 = 1,5xS_{(1)}$ and probability $P_u = 0,98$, so real tolerance will reach (15)

oraz

$$u_{1l} = -3,45 ; u_{2l} = +3,45$$

W tym przypadku prawdopodobieństwo dla przyjętej wcześniej wartości tolerancji zaobserwowanej $T_r = 4,6S_{(1)}$ wyniesie

$$P_{ul} = 2[0,5P_m - (\Phi(u_1) - \Phi(u)))] = 2[0,49 - (0,9997 - 0,9893)] = 0,9592 \quad (16b)$$

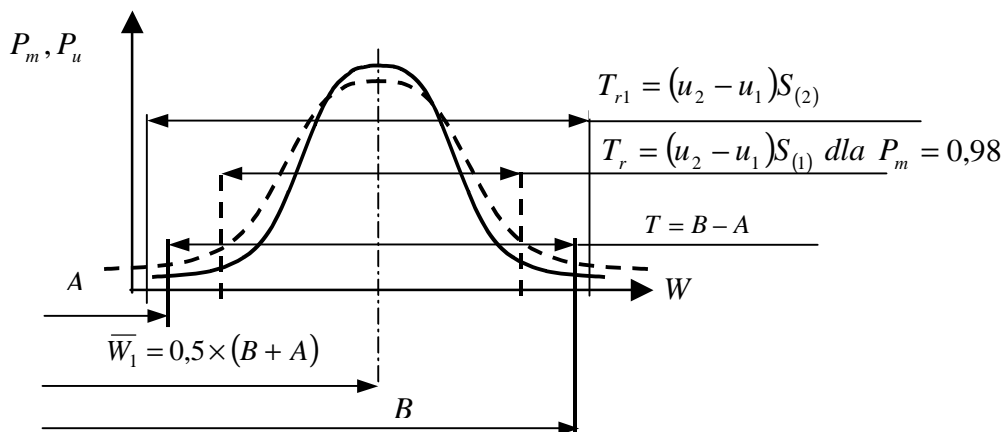
Zmienność odchylenia standardowego w sposób graficzny przedstawiono na (rys.3).

and

$$u_{1l} = -3,45 ; u_{2l} = +3,45$$

In such a case probability for a real tolerance value $T_r = 4,6S_{(1)}$ assumed earlier will be

Standard deviation variability is illustrated on the graph (fig.3).



Rys. 3. Wpływ zmienności odchylenia standardowego na wartość tolerancji rzeczywistej w stosunku do tolerancji konstrukcyjnej wymiaru

Fig. 3. The impact of standard deviation variability on real tolerance value in relation to structural tolerance

Zmienność odchylenia standardowego można tolerować [1] przy pomocy współczynnika C_p wyrażającego miarę zakresu zmienności wartości rzeczywistej wymiaru w stosunku do jego tolerancji konstrukcyjnej

$$C_p = \frac{B - A}{k_i \times S_{(i)}} \geq 1 \quad (17)$$

Dla przyjętego w naszym przypadku prawdopodobieństwa P_{ul} wartość tego współczynnika wyniesie

$$C_p = \frac{6S_{(2)}}{4,6S_{(2)}} = 1,3$$

przy czym należy pamiętać, że zmienność odchylenia standardowego w granicach $\pm 1,5 \times S_{(1)}$ zmniejszyła prawdopodobieństwo znalezienia wartości poprawnej w przedziale tolerancji zaobserwowanej do wartości $P_{ul} = 0,9592$.

Standard deviation variability may be tolerated [1] by means of the coefficient C_p expressing measure of real dimension variability range towards its structural tolerance

$$C_p = \frac{B - A}{k_i \times S_{(i)}} \geq 1 \quad (17)$$

For the probability P_{ul} assumed in our case, the coefficient will be

$$C_p = \frac{6S_{(2)}}{4,6S_{(2)}} = 1,3$$

but it must be remembered that standard deviation variability within the limits $\pm 1,5 \times S_{(1)}$ led to decreasing probability of finding true value within the real tolerance range to $P_{ul} = 0,9592$.

5.2. Badanie wpływu niezgodności średniej statystycznej ze średnią arytmetyczną na tolerancję rzeczywistą

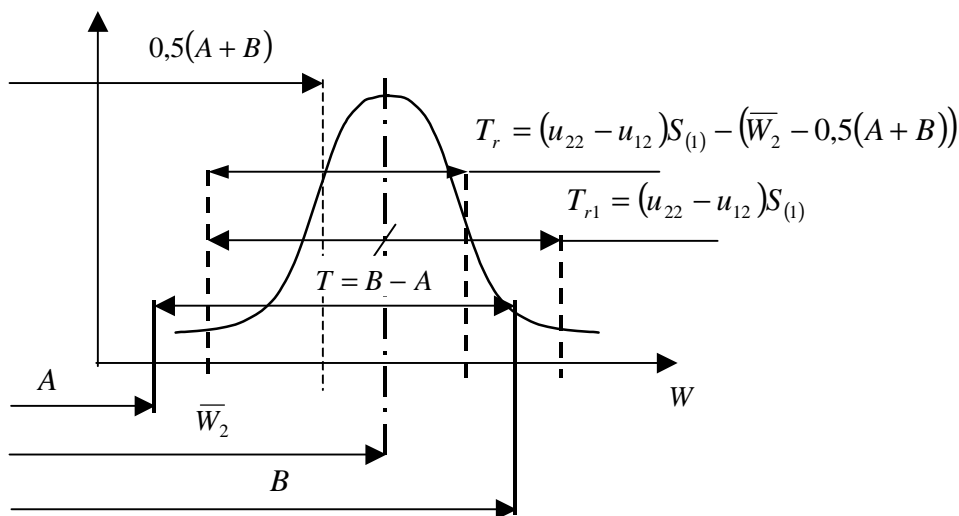
W celu zbadania, jaki jest wpływ niezgodności statystycznej wartości średniej ze średnią arytmetyczną wartości granicznych na tolerancję rzeczywistą, przyjmijmy założenie, że niezgodność ta jest równa $0,3T$ a odchylenie standardowe $S_{(l)}$ zapewnia tolerancję rzeczywistą T_r o wartości określonej zależnością (15), przy prawdopodobieństwie równym $P_u = 0,98$.

Z uwagi na występującą asymetrię wartości średniej, górna granica tolerancji T_r wykracza poza granicę górnego wymiaru granicznego B (rys.4).

5.2. The studies on the impact of inconsistency between statistical mean and arithmetic mean on real tolerance

In order to study the effect of inconsistency between statistical mean and arithmetic mean of limit values on real tolerance, let's assume that such an inconsistency is equal to $0,3T$ and standard deviation $S_{(l)}$ guarantee real tolerance T_r to reach the value determined by the relation (15), at probability $P_u = 0,98$.

With regard to the asymmetry of mean value, upper limit of tolerance T_r exceeds upper dimension limit B (fig.4).



Rys .4. Asymetria tolerancji rzeczywistej względem średniej arytmetycznej tolerancji

Fig. 4. Asymmetry of real tolerance in relation to arithmetic tolerance mean

Aby zachować zgodność tolerancji zaobserwowanej z konstrukcyjną, należy jednostronnie zmniejszyć tolerancję T_{r1} do wartości T_r równej

$$T_r = (u_{22} - u_{12}) \times S_{(l)} - (\bar{W}_2 - 0,5(A + B)) \quad (18)$$

Prawdopodobieństwo znalezienia poprawnej wartości w przedziale tolerancji T_r , można wyznaczyć z zależności (12) przyjmując:

$$u_{12} \cong u_1 - 0,3T = -2,3 - 0,3 \times 3 = -3,2$$

$$u_{22} = u_2 - 0,3T = +2,3 - 0,3 \times 3 \cong +1,4$$

Prawdopodobieństwo P_{u2} znalezienia wartości poprawnej w tym przedziale będzie równe zgodnie z (12):

$$P_{u2}(u_{12} \leq W \leq u_{22}) = \Phi(u_{22}) - \Phi(u_{12}) = 0,9192 - 0,0007 = 0,9185 \quad (18a)$$

In order to keep real tolerance in consistency with structural tolerance, tolerance T_{r1} needs to be one-sidedly decreased to the value T_r equal to

$$T_r = (u_{22} - u_{12}) \times S_{(l)} - (\bar{W}_2 - 0,5(A + B)) \quad (18)$$

Probability of finding true value within the tolerance range T_r , may be determined from the relation (12) if it is assumed that:

$$u_{12} \cong u_1 - 0,3T = -2,3 - 0,3 \times 3 = -3,2$$

$$u_{22} = u_2 - 0,3T = +2,3 - 0,3 \times 3 \cong +1,4$$

Probability P_{u2} of finding true value within this range will be consistent with (12) and equal to:

Asymetrię wartości średniej można tolerować [1] przy pomocy współczynnika C_c określającego dopuszczalną miarę asymetrii rozkładu względem średniej arytmetycznej pola tolerancji:

$$C_c = \frac{|\bar{W} - 0,5(B + A)|}{0,5(B - A)} \leq 1 \quad (19)$$

Z przytoczonego zapisu miary asymetrii wynika, że wartość współczynnika C_c powinna być mniejsza od jedności dla poprawnie przebiegającego procesu. W analizowanym przypadku dla przyjętych założeń jego wartość wynosi:

$$C_c = \frac{0,3T}{0,5T} = 0,6$$

Z powyższej analizy wynika, że wraz ze wzrostem wartości współczynnika C_c maleje prawdopodobieństwo wystąpienia wartości poprawnej w przedziale równym tolerancji zaobserwowanej, a im większa jest wartość tego współczynnika to prawdopodobieństwo jest mniejsze.

5.3. Badania wpływu niezgodności wartości średniej i asymetrii odchylenia standardowego na tolerancje rzeczywistą

W analizowanych powyżej przypadkach zmienności procesu, odchylenie standardowe charakteryzowało się symetrią względem statystycznej wartości średniej (rys. 3) i (rys. 4). Bardziej ogólnym przypadkiem zmienności procesu jest występowanie asymetrii wartości średniej i odchylenia standardowego (rys. 5 linia ciągła).

Asymmetry of mean value can be tolerated [1] by means of the coefficient C_c determining limit measure of distribution asymmetry in relation to arithmetic tolerance zone:

$$C_c = \frac{|\bar{W} - 0,5(B + A)|}{0,5(B - A)} \leq 1 \quad (19)$$

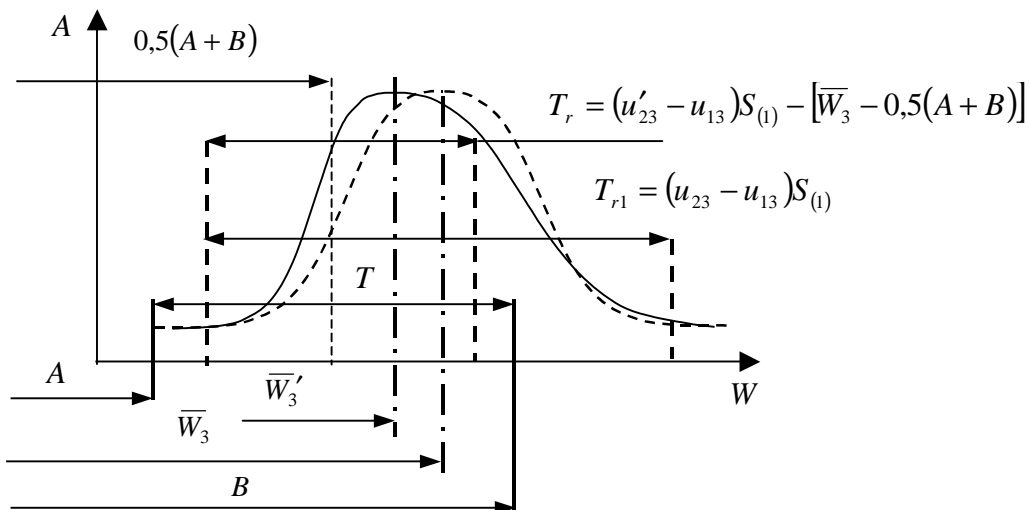
The record mentioned above proves that the value of the coefficient C_c should be lower than 1 for the process run properly. In the analysed case with the assumptions accepted earlier its value is:

$$C_c = \frac{0,3T}{0,5T} = 0,6$$

It seems to be evident that the increase of the value of the coefficient C_c is followed by decreasing probability of occurring true value within the range equal to real tolerance.

5.3. The studies on the inconsistency between mean value and asymmetry of standard deviation on real tolerance

In the process variability cases analysed earlier, standard deviation was characterised by the symmetry towards statistical mean value (fig. 3) and (fig. 4). More general case of the process variability is occurrence of asymmetry of mean value and standard deviation (fig. 5 full line).



Rys. 5. Asymetria tolerancji rzeczywistej względem średniej arytmetycznej tolerancji
 Fig. 5. Asymmetry of real tolerance towards arithmetic mean of tolerance

W celu zbadania jaki jest wpływ niezgodności wartości średniej i asymetrii odchylenia standardowego na tolerancję zaobserwowaną rozpatrzmy dwa przypadki:

(1) Przyjmijmy dla spójności prowadzonej analizy, że w przedziale tolerancji zaobserwowanej T_{r1} prawdopodobieństwo $P_u = 0,98$ a wartość średnią \bar{W}_3 wyznaczono ze wzoru (10). W tym przypadku odchylenie standardowe sprowadzimy do symetrycznego (rys. 5 linia przerywana), ale o wartości większej niż w poprzednich przykładach. Asymetria wartości średniej będzie inna niż $0,3T$ ponieważ wartość średnia statystyczna przesunie się dodatkowo z uwagi na asymetrię odchylenia standardowego. Dla tych warunków możemy oszacować u_{23} i u_{13} i wyznaczyć prawdopodobieństwo P'_{u3} znalezienia wartości poprawnej w przedziale tolerancji T_r . W tym celu przyjmijmy, że:

$$S_{(2)} = 1,5S_{(1)}; \text{ oraz } k_2 = u'_{23} - u_{13}; k_1 = u_2 - u_1$$

a następnie wyznaczmy u_{13} i u'_{23} , sprowadzając parametry k_2 i $S_{(2)}$ do wartości k_1 i $S_{(1)}$ stosowanych w poprzednich analizach.

$$u_{13} = 0,5k_2S_{(2)} = 0,5k_1 \times 1,5S_{(1)} = 0,75k_1S_{(1)} = 0,75 \frac{u_1}{0,5} = 1,5u_1 = -3,45$$

$$u_{23} = +3,45$$

$$u'_{23} = k_1S_{(1)} - 0,5k_2S_{(2)} = k_1S_{(1)} - 0,5k_1 \times 1,5S_{(1)} = 0,25k_1S_{(1)} = 0,25 \frac{u_2}{0,5} = 0,5u_2 = 1,15$$

$$P'_{u3}(u_{13} \leq W \leq u'_{23}) = \Phi(0,5u'_{23}) - \Phi(1,5u_{13}) = \Phi(1,15) - \Phi(-3,45) = 0,8749 - 0,0003 = 0,8746$$

$$P'_{u3} = 0,8746$$

(2) Przyjmijmy teraz, że średnia \bar{W}_3 nie została wyznaczona ze wzoru (10) ale przyjęto za średnią wartość \bar{W}'_3 wokół której występuje maksymalna koncentracja wyników pomiarów. W tym przypadku przedział tolerancji zaobserwowanej T_{r1} stanie się przedziałem asymetrycznym tzn. $|u_{23}| \neq |u_{13}|$. Dla tych warunków możemy oszacować u_{23} i u_{13} i wyznaczyć prawdopodobieństwo wartości P''_{u3} .

$$u_{13} = u_1 - 0,3T = -2,3 - 0,9 = -3,2$$

natomiast u_{23} wyznaczmy przypisując tylko jednej stronie wzrost odchylenia standardowego do wartości równej $1,5xS_{(1)}$

$$u_{23} = 1,5 \times u_1 = 1,5 \times 2,3 = 3,45$$

In order to study the effect of discrepancy between mean value and asymmetry of standard deviation on real tolerance, two cases must be considered:

(1) To make the analysis coherent it needs to be assumed that within the tolerance range T_{r1} , probability $P_u = 0,98$, and mean value \bar{W}_3 has been determined according to the formula (10). In that case standard deviation must be taken as symmetrical (fig. 5 broken line), but its value will be higher than in previous examples. Asymmetry of mean value will be different from $0,3T$ because mean statistical value will additionally move with regard to asymmetry of standard deviation. For such conditions u_{23} i u_{13} may be assessed and probability P'_{u3} of finding true value within the tolerance range T_r - determined. To achieve that we must assume that:

$$S_{(2)} = 1,5S_{(1)}; \text{ oraz } k_2 = u'_{23} - u_{13}; k_1 = u_2 - u_1$$

and then we are able to determine u_{13} i u'_{23} , bringing parameters k_2 and $S_{(2)}$ to the values k_1 and $S_{(1)}$ applied in previous analyses.

(2) The other case is based on the assumption that instead of determining mean value \bar{W}_3 according to the formula (10), another value \bar{W}'_3 , around which there is a maximum concentration of measurement results has been accepted as a mean. In this case the real tolerances range T_{r1} will become asymmetrical, i.e. $|u_{23}| \neq |u_{13}|$. For such conditions we may assume u_{23} i u_{13} and determine probability P''_{u3} .

$$u_{13} = u_1 - 0,3T = -2,3 - 0,9 = -3,2$$

whereas u_{23} will be determined by one-side attribution of standard deviation increase to the value equal to $1,5xS_{(1)}$

$$u_{23} = 1,5 \times u_1 = 1,5 \times 2,3 = 3,45$$

przy czym w przedziale tolerancji zaobserwowanej ustabilizowanego procesu będzie mieścić się tylko część u''_{23} przedziału u_{23} równa:

$$u''_{23} = 4,6 - 3,2 = 1,4$$

$$P''_{u_{23}}(u_{13} \leq W \leq u''_{24}) = \Phi(u''_{23}) - \Phi(u_{13}) = \Phi(1,4) - \Phi(3,2) = 0,9192 - 0,0003 = 0,9189$$

$$P''_{u_{23}} = 0,9189$$

Taki przebieg zmienności procesu można tolerować [1] przy pomocy współczynnika C_{pk} określającego dopuszczalną asymetryczną miarę zmienności rozkładu elementu:

$$C_{pk} = \min \left[\frac{B - \bar{W}}{0,5k_i \times S_{(i)}} \text{ lub } \frac{\bar{W} - A}{0,5k_i \times S_{(i)}} \right] \quad (20)$$

W analizowanych przypadkach wartość współczynnika C_{pk} wynosi:

$$C'_{pk} = \frac{1,15S_{(i)}}{2,3S_{(i)}} = 0,500 \text{ lub } \frac{3,45S_{(i)}}{2,3S_{(i)}} = 1,5$$

$$C''_{pk} = \frac{1,4S_{(i)}}{2,3S_{(i)}} = 0,609 \text{ lub } \frac{3,45S_{(i)}}{2,3S_{(i)}} = 1,5$$

Z obliczonych wartości współczynnika C_{pk} wynika, że im mniejsza jest jego wartość tym prawdopodobieństwo znalezienia wartości poprawnej w przedziale tolerancji jest mniejsze.

5. Wnioski

Statystyczna analiza tolerancji dowodzi, że tolerancja zaobserwowana jest istotnym parametrem oceny stabilności procesu technologicznego. Wyniki przeprowadzonej analizy prezentują wykresy słupkowe na (rys. 6). Porównanie prezentowanych wartości wskazuje, że przy wyznaczaniu wartości tolerancji zaobserwowanej, należy uwzględnić prawdopodobieństwo wystąpienia w jej przedziale wartości poprawnej.

but at the same time there will be only part u''_{23} of the range u_{23} that will fit within the range of real tolerance of stabilised process and will be equal to:

Such a course of the process variability may be tolerated [1] by means of the coefficient C_{pk} determining limit asymmetrical measure of element distribution variability:

$$C_{pk} = \min \left[\frac{B - \bar{W}}{0,5k_i \times S_{(i)}} \text{ lub } \frac{\bar{W} - A}{0,5k_i \times S_{(i)}} \right] \quad (20)$$

The value of the coefficient C_{pk} in analysed cases is:

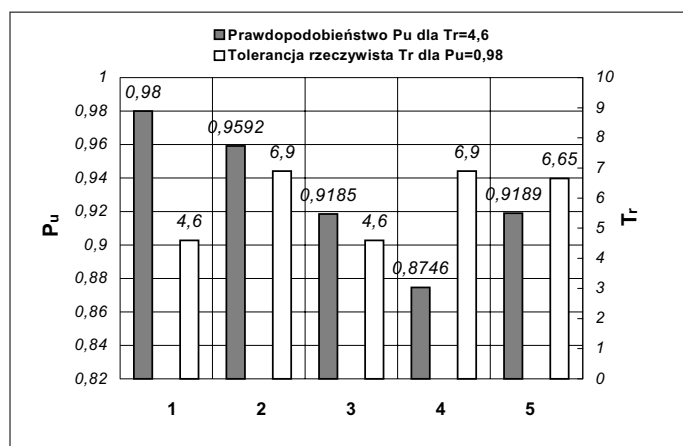
$$C'_{pk} = \frac{1,15S_{(i)}}{2,3S_{(i)}} = 0,500 \text{ lub } \frac{3,45S_{(i)}}{2,3S_{(i)}} = 1,5$$

$$C''_{pk} = \frac{1,4S_{(i)}}{2,3S_{(i)}} = 0,609 \text{ lub } \frac{3,45S_{(i)}}{2,3S_{(i)}} = 1,5$$

The calculated values of the coefficient C_{pk} prove that its lower value is strongly connected with lower probability of finding true value within the tolerance range.

5. Conclusions

Statistical analysis of tolerance demonstrates that real tolerance is a significant parameter to assess stability of technological process. The results of analysis are shown as bar charts on fig. 6. The comparison between presented values indicates that determination of real tolerance value should include probability of occurring true value within its range.



Rys. 6. Zestawienie wyników analizy wpływu stabilności procesu na wartość tolerancji zaobserwowanej wymiaru
 1- proces ustabilizowany, 2- proces o odchyleniu standardowym , 3- proces o odchyleniu standardowym i odchyleniu średniej równym , 4- proces o odchyleniu standardowym i odchyleniu średniej dla którego przyjęto za średnią, średnią statystyczną, 5- proces o odchyleniu standardowym i odchyleniu średniej dla którego przyjęto za średnią, wartość najbardziej prawdopodobną

Fig. 6. The results of analysis on the impact of process stability on real dimensional tolerance

1- stabilised process, 2- process of standard deviation , 3- process of standard deviation and mean deviation equal to, 4- process of standard deviation and mean deviation, for which statistical value has been assumed as a mean, 5- process of standard deviation and mean deviation, for which the most probable value has been assumed as a mean

Należy podkreślić, że dla tolerancji zaobserwowanej $T_r=4,6S_{(1)}$ zgodnej z tolerancją konstrukcyjną, wartość prawdopodobieństwa P_u może obniżyć się od wartości 0,98 dla procesu ustabilizowanego aż do wartości 0,87 dla procesu o niestabilności odchylenia standardowego $S_{(2)}=1,5S_{(1)}$, i niezgodności wartości średnich równej $0,3T$.

It must be stressed that for real tolerance $T_r=4,6S_{(1)}$ consistent with structural tolerance, probability value may decrease from 0,98 for a stabilised process up to 0,87 for the process of standard deviation instability $S_{(2)}=1,5S_{(1)}$, and discrepancy between mean values equal to $0,3T$.

6. References

- [1] Białas Sł.: *Tolerowanie statystyczne w budowie maszyn* Technologia Maszyn, '2000 Koszalin'.
- [2] Jakubiec W., Malinowski J.: *Metrologia wielkości geometrycznych*, WNT W-wa 1999.
- [3] Volk W.: *Statystyka stosowana dla inżynierów*, WNT W-wa 1973.

Dr hab. inż. Józef Kuczmaszewski, prof. PL

Dr inż. Krzysztof Kujan

Politechnika Lubelska

Wydział Mechaniczny

Katedra Podstaw Inżynierii Produkcji

ul. Nadbystrzycka 36

20-618 Lublin

e-mail: j_kucz@archimedes.pol.lublin.pl